ISSN 2075-9827

КМП

Карпатські математичні публікації

CARPATHIAN MATHEMATICAL PUBLICATIONS

КАРПАТСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПУБЛИКАЦИИ

Том 4

№ 1

2012

Карпатські математичні публікації

Науковий журнал

Друкується за рішенням Вченої ради
Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника

Адреса р... ...ематики та інформатики
...ий національний університет
...Стефаника
..., 57
...ранківськ
Тел.:
e-mail: ...il.com
Адреса в... ...pu.if.ua

НБ ПНУС
776499

Карпатські математичні публікації

Науковий журнал
Т.4, №1
2012

Зміст

Банах Т.О., Мартиненко М.В., Зарічний М.М. *Про мономорфні топологічні функтори зі скінченними носіями* . . . 1

Буртняк І.В., Малицька Г.П. *Фундаментальні матриці розв'язків одного класу вироджених параболічних систем* . . . 12

Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Нестеренко О.Н. *Про апроксимацію відображень зі значеннями у просторі неперервних функцій* . . . 23

Глова Т.Я., Філевич П.В. *Зростання цілих функцій в термінах узагальнених порядків* . . . 28

Довбняк Т.С., Заторський Р.А. *Парафункції матриць вертикальної та горизонтальної структури* . . . 36

Заболоцький М.В., Костюк О.В. *Повільне зростання інтегралів Стільтьєса від монотонних функцій* . . . 43

Загороднюк А.В., Митрофанов М.А. *Слабко поліноміальна та слабко аналітична топологія на банахових просторах і на просторах Фреше* . . . 49

Копорх К.М. *Простір відкритих факторвідображень збіжної послідовності* . . . 58

Красікова І.В., Попов М.М. *Замітка про оператори з функціональних просторів Кете у простір $c_0(\Gamma)$* . . . 67

Лопушанський А.О., Лопушанська Г.П., Пасічник О.В. *Два формулювання узагальненої задачі Коші для півлінійного рівняння дифузії з дробовою похідною за часом* . . . 72

Лопушанський О.В., Шарин С.В. *Функціональне числення для генераторів аналітичних напівгруп операторів* . . . 83

Мельник Т.А., Наквасюк Ю.А. *Усереднення параболічної крайової задачі Сіньоріні в густому з'єднанні типу 3:2:1* . . . 90

Мулява О.М., Шеремета М.М. *Належність до класів збіжності адамарових композицій похідних Гельфонда-Леонтьєва аналітичних функцій* . . . 111

Самусенко П.Ф. *До питання про канонічні форми регулярної в'язки матриць* . . . 116

Сидоренко Ю.М., Чвартацький О.І. *Матричні узагальнення інтегровних систем з інтегро-диференціальними зображеннями Лакса* . . . 125

Стефлюк С.Д. *Два класи взаємно обернених многочленів розбиттів* . . . 145

Кондратюк А.А., Христіянин А.Я. *Мероморфні відображення тора на сферу Рімана* 155

Василишин Богдан Васильович *(некролог)* . . . 160

Carpathian mathematical publications

SCIENTIFIC JOURNAL
V.4, №1
2012

CONTENTS

Banakh T., Martynenko M., Zarichnyi M. *On monomorphic topological functors with finite supports* 4

Burtnyak I.V., Malytska H.P. *Fundamental matrix of solutions for one class of parabolic degenerate systems* 12

Maslyuchenko V.K., Nesterenko O.N., Voloshyn H.A. *On approximation of mappings with values in the space of continuous functions* 23

Hlova T.Ya., Filevych P.V. *The growth of entire functions in the terms of generalized orders* 28

Dovbniak T.S., Zatorsky R.A. *Parafunctions of matrices of vertical and horizontal structure* 36

Zabolotskyi M.V., Kostiuk O.V. *Slow growing of Stieltjes integrals of monotone functions* 43

Zagorodnyuk A.V. Mytrofanov M.A. *Weak polynomial topology and weak analytic topology on Banach spaces and on Freshet spaces* 49

Koporkh K.M. *On space of open quotient maps of a convergent sequence* 58

Krasikova I.V., Popov M.M. *A note on operators from Köthe function spaces to* $c_0(\Gamma)$ 67

Lopushansky A.O., Lopushanska H.P., Pasichnyk O.V. *Two definitions of the generalized Cauchy problem for semi-linear diffusion equation with fractional derivative with respect to time* 72

Lopushansky O.V., Sharyn S.V. *Functional calculus for generators of analytic semigroups of operators* 83

Mel'nyk T.A., Nakvasiuk Yu.A. *Homogenization of the parabolic Signorini boundary-value problem in a thick junction of type 3:2:1* 90

Mulyava O.M., Sheremeta M.M. *Belonging to convergence classes of Hadamard compositions of Gelfond-Leont'ev derivatives for analytic functions* 111

Samusenko P.F. *About canonical forms of regular matrix pencil* 116

Sydorenko Yu.M., Chvartatskyi O.I. *Matrix generalizations of integrable systems with Lax integro-differential representations* 125

Stefluk S.D. *Two classes of mutually inverse polynomials of partitions* 145

Khrystiyanyn A.Ya., Kondratyuk A.A. *Meromorphic mappings of torus onto the Riemann sphere* 155

$\boxed{\text{Vasylyshyn Bogdan Vasyliovych}}$ *(obituary)* 160

Карпатские математические публикации

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Т.4, №1
2012

СОДЕРЖАНИЕ

Банах Т.О., Мартыненко М.В., Заричный М.М. *О мономорфных топологических функторах с конечными носителями* 4

Буртняк И.В., Малицкая А.П. *Фундаментальные матрицы решений одного класса вырожденных параболических систем* 12

Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Нестеренко О.Н. *Об апроксимации отображений со значениями в пространстве непрерывных функций* 23

Глова Т.Я., Филевич П.В. *Рост целых функций в терминах обобщенных порядков* 28

Довбняк Т.С., Заторский Р.А. *Парафункции матриц вертикальной и горизонтальной структуры* 36

Заболоцкий Н.В., Костюк О.В. *Медленный рост интегралов Стильтьеса от монотонных функций* 43

Загороднюк А.В., Митрофанов М.А. *Слабо полиномиальная и слабо аналитическая топология на банаховых пространствах и на простанствах Фреше* 49

Копорх К.М. *Пространство открытых фактороотображений сходящейся последовательности* 58

Красикова И.В., Попов М.М. *Заметка об операторах из функциональных пространств Кёте в пространство* $c_0(\Gamma)$ 67

Лопушанский А.О., Лопушанская Г.П., Пасичник Е.В. *Две постановки обобщенной задачи Коши для полулинейного уравнения диффузии с дробной производной по времени* 72

Лопушанский О.В., Шарин С.В. *Функциональное исчисление для генераторов аналитических полугрупп операторов* 83

Мельник Т.А., Наквасюк Ю.А. *Усреднение параболической краевой задачи Синьорини в густом соединении типа 3:2:1* 90

Мулява О.М., Шеремета М.Н. *Принадлежность классам сходимости адамаровских композиций производных Гельфонда-Леонтьева аналитических функций* 111

Самусенко П.Ф. *К вопросу о канонических формах регулярного пучка матриц* 116

Сидоренко Ю.М., Чвартацкий А.И. *Матричные обощения интегрируемых систем с интегро-дифференциальными представлениями Лакса* 125

Стефлюк С.Д. *Два класса взаимно обратных многочленов разбиений* 145

Кондратюк А.А., Християнин А.Я. *Мероморфные отображения тора на сферу Римана* 155

$\boxed{\text{Василишин Богдан Васильевич}}$ *(некролог)* 160

Карпатські математичні публікації. Т.4, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №1

УДК 515.12

Banakh T., Martynenko M., Zarichnyi M.

ON MONOMORPHIC TOPOLOGICAL FUNCTORS WITH FINITE SUPPORTS

Banakh T., Martynenko M., Zarichnyi M. *On monomorphic topological functors with finite supports*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 4–11.

We prove that a monomorphic functor $F : \mathbf{Comp} \to \mathbf{Comp}$ with finite supports is epimorphic, continuous, and its maximal $\varnothing$-modification F° preserves intersections. This implies that a monomorphic functor $F : \mathbf{Comp} \to \mathbf{Comp}$ of finite degree $\deg F \le n$ preserves (finite-dimensional) compact ANRs if the spaces $F\varnothing$, $F^\circ\varnothing$ and Fn are finite-dimensional ANRs. This improves a known result of Basmanov.

1 Introduction

In this paper we study monomorphic functors with finite supports defined on topological categories and then apply the obtained results to generalize the classical result of Basmanov on the preservation of (finite-dimensional) compact ANRs by functors of finite degree in the category **Comp** of compact Hausdorff spaces and their continuous maps.

Let $\mathbf{T}$ denote the category whose objects are topological spaces and whose morphisms are (not necessarily continuous) functions between topological spaces. By a **Top**-*like category* we understand a subcategory $\mathbf{C}$ of the category $\mathbf{T}$ such that each finite discrete topological space is an object of $\mathbf{C}$ and each map $f : D \to X$ from a finite discrete space to an object of the category $\mathbf{C}$ is a morphism of $\mathbf{C}$. This implies that each monomorphism of the category $\mathbf{C}$ is an injective function.

We say that a functor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{T}$ defined on a **Top**-like category $\mathbf{C}$

- is *monomorphic* if F preserves monomorphisms;
- has *finite supports* (resp. *finite degree* $\le n$) if for each object X of $\mathbf{C}$ and each $a \in FX$ there is a map $f : A \to X$ from a finite discrete space A (of cardinality $|A| \le n$) such that $a \in Ff(FA)$;
- *preserves the empty set* if $F\varnothing = \varnothing$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30, 54C55.
Key words and phrases: monomorphic functor, finite support, functor of finite degree.

Let us observe that for each (monomorphic) functor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{T}$ that does not preserve the empty set we can change the value of F at $\varnothing$ and define a new (monomorphic) functor $F_\circ : \mathbf{C} \to \mathbf{T}$,

$$F_\circ X = \begin{cases} FX & \text{if } X \ne \varnothing, \\ \varnothing & \text{if } X = \varnothing. \end{cases}$$

which preserves the empty set. This functor $F_\circ$ is called the *minimal $\varnothing$-modification* of F.

By an *$\varnothing$-modification* of a (monomorphic) functor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{T}$ we understand a (monomorphic) functor $\tilde F : \mathbf{C} \to \mathbf{T}$ such that $\tilde F X = FX$ for each non-empty object X of the category $\mathbf{C}$. So, the values of the functors F and $\tilde F$ can differ only on the empty set. The functor $F_\circ$ is the minimal $\varnothing$-modification of F in the sense that $F_\circ$ is a subfunctor of any $\varnothing$-modification $\tilde F$ of F.

It turns out that the family of all $\varnothing$-modifications of a given monomorphic functor F has a maximal element F°. Below we identify a finite ordinal n with the finite discrete space $\{0, \dots, n-1\}$. For $i \in 2$ let $f_i : 1 \to \{i\} \subset 2$ be the constant map.

Theorem 1. *Each monomorphic functor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{T}$ has the maximal $\varnothing$-modification $F^\circ : \mathbf{C} \to \mathbf{T}$ assigning to $\varnothing$ the space*

$$F^\circ\varnothing = \{a \in F1 : Ff_0(a) = Ff_1(a)\} \subset F1.$$

Proof. In the formulation we have defined the action of the functor F° on the empty set. For each non-empty space X in $\mathbf{C}$ we put $F^\circ X = FX$.

Now we define the action of F° on morphisms. Let $f : X \to Y$ be a morphism of the category $\mathbf{C}$. If X is not empty, then so is Y and we put $F^\circ f = Ff$. If $X = \varnothing = Y$, then $F^\circ f$ is the identity map of the space $F^\circ\varnothing$. If $X = \varnothing$ and $Y \ne \varnothing$, then we put

$$F^\circ f = Fg | F^\circ\varnothing : F^\circ\varnothing \to F^\circ Y = FY$$

where $g : 1 \to Y$ is any map.

Let us check that the morphism $F^\circ f$ is well-defined, i.e., it does not depend on the choice of the map $g : 1 \to Y$. Indeed, given another map $g' : 1 \to Y$, consider the map $h : 2 \to Y$ defined by $h(0) = g(0)$ and $h(1) = g'(0)$. It follows that $g = h \circ f_0$ and $g' = h \circ f_1$ and then for any $a \in F^\circ\varnothing$

$$Fg(a) = F(h \circ f_0)(a) = Fh \circ Ff_0(a) = Fh \circ Ff_1(a) = F(h \circ f_1)(a) = Fg'(a).$$

This argument also implies that $F^\circ(g \circ f) = F^\circ g \circ F^\circ f$ for any morphisms

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

of the category $\mathbf{C}$. This means that $F^\circ : \mathbf{C} \to \mathbf{T}$ is a well-defined monomorphic functor. It is clear that F° is an $\varnothing$-modification of F.

It remains to check that F° is the maximal $\varnothing$-modification of F. We shall show that for any $\varnothing$-modification $\tilde F$ of F we get $\tilde F i_1^\varnothing(\tilde F\varnothing) \subset F^\circ\varnothing \subset F1$ where $i_1^\varnothing : \varnothing \to 1$ is the unique map. Applying the functor $\tilde F$ to the equality $f_0 \circ i_1^\varnothing = f_1 \circ i_1^\varnothing$ we get $\tilde F f_0 \circ \tilde F i_1^\varnothing(a) = \tilde F f_1 \circ \tilde F i_1^\varnothing(a)$ for every $a \in \tilde F\varnothing$, which means that $\tilde F i_1^\varnothing(a) \in F^\circ\varnothing$ and thus $\tilde F i_1^\varnothing(\tilde F\varnothing) \subset F^\circ\varnothing$. $\square$

Now, given a functor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{T}$ with finite supports and an object X of the category $\mathbf{C}$, we define the support map $\mathrm{supp}_X : F^\circ X \to [X]^{<\omega}$ into the set $[X]^{<\omega}$ of finite subsets of X. Each finite subset $A \subset X$ will be endowed with the discrete topology. By $i_X^A : A \to X$ we denote the identity map from the finite discrete space A to X.

For an element $a \in F^\circ X$ the set

$$\mathrm{supp}_X(a) = \bigcap\{A \in [X]^{<\omega} : a \in F^\circ i_X^A(F^\circ A)\}$$

is called the *support* of a.

The principal result of this paper is the following theorem, which has been applied in [2].

Theorem 2. *Let* $\mathbf{C}$ *be a* **Top**-*like category and* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{T}$ *be a monomorphic functor with finite supports. For any element* $a \in F^\circ X$ *the support* $A = \mathrm{supp}_X(a)$ *is a well-defined finite subset of* X *such that* $a \in F^\circ i_X^A(F^\circ A)$.

We postpone the proof of this theorem till Section 2. Now we discuss an application of Theorem 2 to functors of finite degree in the **Top**-like category **Comp** of compact Hausdorff spaces and their continuous maps. First we recall the necessary definitions, see [5] for more details.

A functor $F : \mathbf{Comp} \to \mathbf{T}$

- is *epimorphic* if F preserves epimorphisms (which coincide with surjective maps in the categories **Comp** and **T**);
- is *continuous* if $F(\mathbf{Comp}) \subset \mathbf{Comp}$ and F preserves the limits of inverse spectra in the category **Comp**;
- *preserves intersections* if for any compact Hausdorff space X and closed subsets $X_\alpha \subset X$, $\alpha \in A$, with intersection $Z = \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$, we get $Fi_X^Z(Z) = \bigcap_{\alpha\in A} Fi_X^{X_\alpha}(FX_\alpha)$.

Here for two compact Hausdorff spaces $A \subset B$ by $i_B^A : A \to B$ we denote the identity embedding.

Theorem 2 is a key ingredient in the proof of the following:

Theorem 3. *Each monomorphic functor* $F : \mathbf{Comp} \to \mathbf{T}$ *with finite supports is epimorphic and its maximal* $\varnothing$*-modification* $F^\circ : \mathbf{Comp} \to \mathbf{T}$ *preserves intersections.*

For endofunctors $F : \mathbf{Comp} \to \mathbf{Comp}$ in the category of compacta we can prove a bit more:

Theorem 4. *For each monomorphic functor* $F : \mathbf{Comp} \to \mathbf{Comp}$ *with finite supports its maximal* $\varnothing$*-modification* $F^\circ : \mathbf{Comp} \to \mathbf{Comp}$ *is a monomorphic, epimorphic, continuous, intersection preserving functor with finite supports. Moreover, the functors* F *and* F° *preserve the weight of infinite compacta if and only if for every* $n \in \omega$ *the space* Fn *is metrizable.*

In [3] V.Basmanov proved that each monomorphic continuous functor $F : \mathbf{Comp} \to \mathbf{Comp}$ of finite degree $\deg F \le n$ preserves (finite-dimensional) compact ANRs provided F preserves intersections and the spaces $F\varnothing$ and Fn are finite-dimensional ANRs. Theorem 4 allows us to improve this Basmanov's result:

Theorem 5. *A monomorphic functor* $F : \mathbf{Comp} \to \mathbf{Comp}$ *of finite degree* $\deg F \le n$ *preserves (finite-dimensional) compact ANRs provided* $F\varnothing$, $F^\circ\varnothing$, *and* Fn *are finite-dimensional ANRs.*

This theorem implies the following corollary that will be applied in [1] for studying the functors of free topological universal algebras.

Corollary 1. *A monomorphic functor* $F : \mathbf{Comp} \to \mathbf{Comp}$ *of finite degree* $\deg F \le n$ *preserves (finite-dimensional) compact ANRs provided the space* $F1$ *is finite and* Fn *is a finite-dimensional ANR.*

2 PROOF OF THEOREM 2

We assume that $F : \mathbf{C} \to \mathbf{T}$ is a monomorphic functor with finite supports defined on a **Top**-like category $\mathbf{C}$ and $F^\circ : \mathbf{C} \to \mathbf{T}$ is its maximal $\varnothing$-modification. We recall that for a finite subset A of a topological space X by $i_X^A : A \to X$ we denote the identity map from A endowed with the discrete topology to X.

Theorem 2 will be derived from the following lemma.

Lemma 1. *For any subsets* A, B *of a finite discrete space* X *we get*

$$F^\circ i_X^{A\cap B}(F^\circ(A \cap B)) = F^\circ i_X^A(FA) \cap F^\circ i_X^B(FB).$$

Proof. The inclusion $F^\circ i_X^{A\cap B}(F^\circ(A\cap B)) \subset F^\circ i_X^A(F^\circ A) \cap F^\circ i_X^B(F^\circ B)$ follows from the functoriality of F°. To prove the reverse inclusion, we consider 4 cases.

1. If $A \subset B$, then $i_X^A = i_X^B \circ i_B^A$ and then $F^\circ i_X^A(F^\circ A) = F^\circ i_X^B \circ F^\circ i_B^A(F^\circ A) \subset F^\circ i_X^B(F^\circ B)$ and $F^\circ i_X^A(F^\circ A) \cap F^\circ i_X^B(F^\circ B) = F^\circ i_X^A(F^\circ A) = F^\circ i_X^{A\cap B}(F^\circ(A \cap B))$.

2. By analogy we can consider the case $B \subset A$.

3. The sets $A, B \subset X$ are non-empty but have empty intersection $A \cap B = \varnothing$. In this case $F^\circ A = FA$ and $F^\circ B = FB$. To prove that $Fi_X^A(FA) \cap Fi_X^B(FB) \subset F^\circ i_X^\varnothing(F^\circ\varnothing)$, fix any element $c \in Fi_X^A(FA) \cap Fi_X^B(FB)$. We need to prove that $c \in F^\circ i_X^\varnothing(F^\circ\varnothing)$. Find elements $c_A \in FA$ and $c_B \in FB$ such that $Fi_X^A(c_A) = c = Fi_X^B(c_B)$.

First we prove that for any point $a \in A$ we get $c \in Fi_X^{\{a\}}(F\{a\}) \subset FX$. Indeed, consider the map $r : X \to A$ such that $r(x) = x$ if $x \in A$ and $r(x) = a$ if $x \in X\setminus A$. Let $r_{\{a\}}^B : B \to \{a\}$ denote the constant map and observe that $i_X^A \circ r \circ i_X^B = i_X^{\{a\}} \circ r_{\{a\}}^B$.

Applying the functor F to the equality $i_X^A = i_X^A \circ r \circ i_X^A$, we get $c = Fi_X^A(c_A) = Fi_X^A \circ Fr \circ Fi_X^A(c_A) = Fi_X^A \circ Fr(c) = Fi_X^A \circ Fr \circ Fi_X^B(c_B) \in F(i_X^A \circ r \circ i_X^B)(c_B) = F(i_X^{\{a\}} \circ r_{\{a\}}^B)(c_B) = Fi_X^{\{a\}}(Fr_{\{a\}}^B(c_B)) \in Fi_X^{\{a\}}(F\{a\}) \subset FX$.

By the same argument, we can prove that $c \in Fi_X^{\{b\}}(F\{b\}) \subset FX$ for any $b \in B$.

Let $r_1^X : X \to 1$ be the unique map and $f_a, f_b : 1 \to X$ be two maps such that $f_a(0) = a \in A$ and $f_b(0) = b \in B$. Since $c \in Fi_X^{\{a\}}(F\{a\}) = Ff_a(F1)$ and $c \in Fi_X^{\{b\}}F(\{b\}) = Ff_b(F1)$ there are two elements $c_a, c_b \in F1$ such that $Ff_a(c_a) = c = Ff_b(c_b)$. Since $r_1^X \circ f_a = \mathrm{id} = r_1^X \circ f_b$, we conclude that

$$c_a = Fr_1^X \circ Ff_a(c_a) = Fr_1^X(c) = Fr_1^X \circ Ff_b(c_b) = c_b.$$

Now we see that the element $c_1 = c_a = c_b$ belongs to $F^\circ\varnothing$ and $c = Ff_a(c_1) = Ff_b(c_1)$, which means that $c = F^\circ i_X^1(c_1) \in F^\circ i_X^\varnothing(F^\circ\varnothing)$ according to the definition of the morphism $F^\circ i_X^\varnothing : F^\circ\varnothing \to F^\circ X = FX$.

4. The intersection $A \cap B$ is not empty. In this case $F^\circ A = FA$, $F^\circ B = FB$ and $F^\circ(A \cap B) = F(A \cap B)$.

To prove that $Fi_X^A(FA) \cap Fi_X^B(FB) \subset Fi_X^{A\cap B}(F(A\cap B))$, fix any element $c \in Fi_X^A(FA) \cap Fi_X^A(FB)$ and find elements $c_A \in FA$ and $c_B \in FB$ such that $Fi_X^A(c_A) = c = Fi_X^B(c_B)$.

Choose any map $r_{A\cap B}^X : X \to A \cap B$ such that $r(x) = x$ for all $x \in A \cap B$ and define retractions $r_A^X : X \to A$ and $r_B^X : X \to B$ by

$$r_A^X(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \in A \\ r_{A\cap B}^X(x) & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{and} \quad r_B^X(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \in B \\ r_{A\cap B}^X(x) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Observe that $r_{A\cap B}^X = r_B^X \circ r_A^X = r_A^X \circ r_B^X$.

We claim that $c_A = Fr_A^X(c)$. Since $i_X^A = i_X^A \circ r_A^X \circ i_X^A$, we get

$$Fi_X^A(c_A) = Fi_X^A \circ Fr_A^X \circ Fi_X^A(c_A) = Fi_X^A \circ Fr_A^X(c) = Fi_X^A(Fr_A^X(c))$$

and hence $c_A = Fr_A^A(c)$ by the injectivity of the map $Fi_X^A : FA \to FX$.

The same argument yields $c_B = Fr_B^X(c)$. Now consider the element $c_{AB} = Fr_{A\cap B}^X(c) \in F(A \cap B)$. Since $r_{A\cap B}^X = r_{A\cap B}^X \circ i_X^A \circ r_A^X$, we get

$$c_{AB} = Fr_{A\cap B}^X(c) = Fr_{A\cap B}^X \circ Fi_X^A \circ Fr_A^X(c) = Fr_{A\cap B}^X \circ Fi_X^A(c_A).$$

Applying the functor F to the equality $i_B^{A\cap B} \circ r_{A\cap B}^X \circ i_X^A = r_B^X \circ i_X^A$, we get

$$Fi_B^{A\cap B}(c_{AB}) = Fi_B^{A\cap B} \circ Fr_{A\cap B}^X \circ Fi_X^A(c_A) = Fr_B^X \circ Fi_X^A(c_A) = Fr_B^X(c) = c_B$$

and then

$$Fi_X^{A\cap B}(c_{AB}) = F(i_X^B \circ i_B^{A\cap B})(c_{AB}) = Fi_X^B \circ Fi_B^{A\cap B}(c_{AB}) = Fi_X^B(c_B) = c,$$

which means that $c = Fi_X^{A\cap B}(c_{AB}) \in Fi_X^{A\cap B}(F(A \cap B))$. □

The following lemma implies Theorem 2.

Lemma 2. *For any object X of the category $\mathbf{C}$ and an element $a \in F^\circ X$ the support $A = \mathrm{supp}_X(a)$ is a well-defined finite subset of X such that $a \in F^\circ i_X^A(F^\circ A)$.*

Proof. We recall that $\mathrm{supp}_X(a) = \cap\mathcal{B}$ where $\mathcal{B} = \{B \in [X]^{<\omega} : a \in F^\circ i_X^B(F^\circ B)\}$. First we show that the family $\mathcal{B}$ is not empty. Since the functor F° has finite supports, there is a map $f : C \to X$ from a finite discrete space C such that $a \in F^\circ f(F^\circ C)$. Let $B = f(C)$ and $f_B^C : C \to B$ be the map such that $f_B^C(c) = f(c)$ for all $c \in C$. Since $f = i_X^B \circ f_B^C$, we get $F^\circ f = F^\circ i_X^B \circ F^\circ f_B^C$ and

$$a \in F^\circ f(F^\circ C) = F^\circ(i_X^B \circ f_B^C)(F^\circ C) = F^\circ i_X^B(F^\circ f_B^C(F^\circ C)) \subset F^\circ i_X^B(F^\circ B).$$

Now we see that $B \in \mathcal{B}$ and the family $\mathcal{B}$ is not empty. So, the intersection $\mathrm{supp}(a) = \cap\mathcal{B}$ is a well-defined finite subset of X. Since $\mathrm{supp}(a) = \cap\mathcal{B}$ is finite, there exist subsets $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{B}$ of X such that $\mathrm{supp}(a) = \bigcap_{i=1}^n B_i$. For every $k \le n$ let $A_k = \bigcap_{i=1}^k B_i$. Thus $A_1 = B_1$ and $A_n = \mathrm{supp}(a)$.

We claim that $a \in F^\circ i_X^{A_k}(F^\circ A_k)$ for every $1 \le k \le n$. This will be done by induction on k. For $k = 1$ this inclusion follows from $A_1 = B_1$ and the choice of B_1. Assume that $a \in F^\circ i_X^{A_{k-1}}(F^\circ A_{k-1})$ for some $k \le n$. Taking into account that $A_k = A_{k-1} \cap B_k$ and $a \in F^\circ i_X^{B_k}(F^\circ B_k)$ and applying Lemma 1, we conclude that $a \in F^\circ i_X^{A_{k-1}}(F^\circ A_{k-1}) \cap F^\circ i_X^{B_k}(F^\circ B_k) = F^\circ i_X^{A_k}(F^\circ A_k)$.

For $k = n$ we get $A_n = \mathrm{supp}(a)$ and hence $a \in F^\circ i_X^{A_n}(F^\circ A_n)$. □

3 Proof of Theorem 3

Let $F : \mathbf{Comp} \to \mathbf{T}$ be a monomorphic functor with finite supports and $F^\circ : \mathbf{Comp} \to \mathbf{T}$ be its maximal $\varnothing$-modification. By Theorem 1, the functor F° is monomorphic. Also it is clear that F° has finite supports. The two properties of F and F° stated in Theorem 3 are proved in the following two lemmas.

Lemma 3. *Each monomorphic functor $F : \mathbf{Comp} \to \mathbf{T}$ with finite supports preserves surjective maps and hence is epimorphic.*

Proof. Let $f : X \to Y$ be a surjective map between compact spaces and $b \in FY$ be any element. Since F has finite supports, there is a finite subset $B \subset Y$ such that $b \in Fi_Y^B(FB)$ where $i_Y^B : B \to Y$ is the identity map from B to Y. Let $s : B \to X$ be any map such that $f \circ s = i_Y^B$. Such a map s exists because the map f is surjective. Fix an element $b_B \in FB$ such that $b = Fi_Y^B(b_B)$ and let $a = Fs(b_B)$. Applying the functor F to the equality $f \circ s = i_X^B$, we get $b = Fi_X^B(b_B) = Ff \circ Fs(b_B) = Ff(a)$, witnessing that the map $Ff : FX \to FY$ is surjective. Therefore F is an epimorphic functor. □

Lemma 4. *The functor $F^\circ : \mathbf{Comp} \to \mathbf{T}$ preserves intersections.*

Proof. Let X be a compact Hausdorff space and X_α, $\alpha \in A$, be closed subspaces of X with intersection $Z = \bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha$. For two compact Hausdorff spaces $A \subset B$ by $i_B^A : A \to B$ we denote the identity embedding.

We need to prove that $F^\circ i_X^Z(F^\circ Z) = \bigcap_{\alpha\in A} F^\circ i_X^{X_\alpha}(F^\circ X_\alpha)$. The inclusion

$$F^\circ i_X^Z(F^\circ Z) \subset \bigcap_{\alpha\in A} F^\circ i_X^{X_\alpha}(F^\circ X_\alpha)$$

trivially follows from the functoriality of F°.

In order to prove the reverse inclusion, fix any element $b \in \bigcap_{\alpha\in A} F^\circ i_X^{X_\alpha}(F^\circ X_\alpha)$. For every $\alpha \in A$ find an element $b_\alpha \in F^\circ X_\alpha$ such that $b = F^\circ i_X^{X_\alpha}(b_\alpha)$. Since the functor F° has finite supports, there is a finite set $Y_\alpha \subset X_\alpha$ such that $b_\alpha \in F^\circ i_{X_\alpha}^{Y_\alpha}(F^\circ Y_\alpha)$. Since $i_X^{Y_\alpha} = i_X^{X_\alpha} \circ i_{X_\alpha}^{Y_\alpha}$, we get

$$b = F^\circ i_X^{X_\alpha}(b_\alpha) \in F^\circ i_X^{X_\alpha}(F^\circ i_{X_\alpha}^{Y_\alpha}(F^\circ Y_\alpha)) = F^\circ i_X^{Y_\alpha}(F^\circ Y_\alpha).$$

The definition of the set $A = \mathrm{supp}(b)$ guarantees that $A = \mathrm{supp}(b) \subset Y_\alpha \subset X_\alpha \subset X$. Then $A \subset \bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha = Z$ and $i_X^A = i_X^Z \circ i_Z^A$. By Theorem 2, $b \in F^\circ i_X^A(F^\circ A)$ and consequently, there is an element $a \in F^\circ A$ such that $b = F^\circ i_X^A(a)$. Let $c = F^\circ i_Z^A(a) \in F^\circ Z$. Then

$$b = F^\circ i_X^A(a) = F^\circ(i_X^Z \circ i_Z^A)(a) = F^\circ i_X^Z(F^\circ i_Z^A(a)) = F^\circ i_X^Z(c) \in F^\circ i_X^Z(F^\circ Z),$$

which completes the proof. □

4 Proof of Theorem 4

Let $F : \mathbf{Comp} \to \mathbf{Comp}$ be a monomorphic functor with finite supports. By Theorem 3, its maximal $\varnothing$-modification $F^\circ : \mathbf{Comp} \to \mathbf{Comp}$ is a monomorphic, epimorphic functor with finite supports, which preserves intersections. The remaining two properties of F° stated in Theorem 4 are proved in the following two lemmas.

Lemma 5. *Each monomorphic functor $F : \mathbf{Comp} \to \mathbf{Comp}$ with finite supports is continuous.*

Proof. By Lemma 3, F is epimorphic. By Theorem 2.2.2 of [5] the continuity of the functor F will follow as soon as we check that for each cardinal κ and any two distinct elements $a, b \in F(\mathbb{I}^\kappa)$ there is a finite subset $D \subset \kappa$ such that $Fp_D(a) \neq Fp_D(b)$ where $p_D : \mathbb{I}^\kappa \to \mathbb{I}^D$ is the projection of the Tychonov cube $\mathbb{I}^\kappa$ onto its face $\mathbb{I}^D$.

Since F has finite supports, there is a finite subset $C \subset \mathbb{I}^\kappa$ such that $a, b \in Fi^C(FC)$ where $i^C : C \to \mathbb{I}^\kappa$ denotes the identity embedding. Find elements $a_C, b_C \in FC$ such that $a = Fi^C(a_C)$ and $b = Fi^C(b_C)$. Since C is finite, we can find a finite subset $D \subset \kappa$ such that the composition $p_D \circ i^C : C \to I^D$ is injective. Since F is monomorphic, the map $Fp_D \circ Fi^C : FC \to F\mathbb{I}^D$ is injective and hence

$$Fp_D(a) = Fp_D \circ Fi^C(a_C) \neq Fp_D \circ Fi^C(b_C) = Fp_D(b).$$

□

For a topological space X by $w(X)$ we denote its weight (equal to the smallest cardinality of a base of the topology of X). For two compact Hausdorff spaces X, Y by $C(X, Y)$ we denote the space of continuous functions from X to Y, endowed with the compact-open topology.

Lemma 6. *If $F : \mathbf{Comp} \to \mathbf{Comp}$ is a monomorphic functor with finite supports, then $w(FX) \leq \sup\{w(X), w(Fn) : n \in \omega\}$ for each infinite compact space X.*

Proof. By Lemmas 3 and 5, the functor F is epimorphic and continuous. Then by Theorem 2.2.3 of [5], for every $n \in \omega$ the map

$$F : C(n, X) \to C(Fn, FX), \quad F : f \mapsto Ff,$$

is continuous and so is the map

$$\xi_n : C(n, X) \times Fn \to FX, \quad \xi_n : (f, a) \mapsto Ff(a),$$

according to the exponential law for the compact-open topology [4, 3.4.8]. Then the image $F_nX = \xi_n(C(n, X) \times Fn) \subset FX$ is a compact space of weight

$$w(F_nX) \leq w(C(n, X) \times Fn) \leq \max\{w(X^n), w(Fn)\} = \max\{w(X), w(Fn)\},$$

see [4, 3.1.22].

Since F has finite supports, the compact space FX is equal to the countable union $FX = \bigcup_{n\in\omega} F_nX$ and hence has weight $w(FX) \leq \sup_{n\in\omega} w(F_nX) \leq \sup\{w(X), w(Fn) : n \in \omega\}$ according to [4, 3.1.20]. □

References

1. Banakh T., Hryniv O. *Free topological universal algebras and absolute neighborhood retracts*. Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat., **65**, 1 (2011), 50–59.
2. Banakh T., Kucharski A., Martynenko M. *On functors preserving skeletal maps and skeletally generated compacta*, preprint (http://arxiv.org/abs/1108.4197).
3. Basmanov V. *Covariant functors, retracts, and dimension*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, **271**, 5 (1983), 1033–1036.
4. Engelking R. General Topology, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
5. Teleiko A., Zarichnyi M. Categorical topology of compact Hausdorff spaces. VNTL Publ., Lviv, 1999. 263 p.

Ivan Franko National University,
Lviv, Ukraine
e-mail: *t.o.banakh@gmail.com, martamartynenko@ukr.net, mzar@litech.lviv.ua*

Received 25.11.2011

Банах Т.О., Мартиненко М.В., Зарічний М.М. *Про мономорфні топологічні функтори зі скінченними носіями* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — C. 4–11.

Доведено, що мономорфний функтор $F : \mathbf{Comp} \to \mathbf{Comp}$ зі скінченними носіями є епіморфним, неперервним і його максимальна $\varnothing$-модифікація F° зберігає перетини. Із цього випливає, що мономорфний функтор $F : \mathbf{Comp} \to \mathbf{Comp}$ скінченного степеня $\deg F \leq n$ зберігає (скінченновимірні) ANR-компакти, якщо простори $F\varnothing$, $F^\circ\varnothing$, і Fn є скінченновимірними ANR-компактами. Цей факт покращує одну відому теорему Басманова, позбавляючи її від зайвих умов.

Банах Т.О., Мартыненко М.В., Заричный М.М. *О мономорфных топологических функторах с конечными носителями* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — C. 4–11.

Доказано, что мономорфный функтор $F : \mathbf{Comp} \to \mathbf{Comp}$ с конечными носителями является эпиморфным, непрерывным и его максимальная $\varnothing$-модификация F° сохраняет пересечения. Из этого следует, что мономорфный функтор $F : \mathbf{Comp} \to \mathbf{Comp}$ конечной степени $\deg F \leq n$ сохраняет (конечномерные) ANR-компакты, если пространства $F\varnothing$, $F^\circ\varnothing$, и Fn являются конечномерными ANR-компактами. Этот факт улучшает одну известную теорему Басманова, избавляя ее от лишних условий.

Карпатські математичні публікації. Т.4. №1

Carpathian Mathematical Publications. V.4. №1

УДК 517.956.4

Буртняк І.В., Малицька Г.П.

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ МАТРИЦІ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

Буртняк І.В., Малицька Г.П. *Фундаментальні матриці розв'язків одного класу вироджених параболічних систем* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — С. 12–22.

Розглянуто один клас ультрапараболічних систем рівнянь другого порядку, що мають три групи змінних, за якими є виродження, і коефіцієнти залежать тільки від часової змінної. Побудовано фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші, одержано оцінки цієї матриці та всіх її похідних.

Ця стаття є продовженням робіт [1], [2], [5], де розглянуто системи вироджених параболічних рівнянь колмогоровського типу. Зауважимо, що детальний опис досліджень і розвитку теорії вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами змінних, за якими є виродження параболічності, зроблено в роботі С.Д. Ейдельмана, С.Д. Івасишена, А.І. Кочубея [4]. Ми розглянули один клас систем рівнянь колмогоровського типу другого порядку, що мають три групи виродження параболічності з коефіцієнтами залежними від часової змінної, для яких виконуються умови типу умов Лаппо-Данилевського, встановили існування, єдиність фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші (ФМРЗК), дослідили властивості і оцінки похідних ФМРЗК.

1 Позначення і постановка задачі Коші

Нехай n_0, n_1, n_2, n_3, n_4 — фіксовані натуральні числа, причому $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq n_4$ і $\sum\limits_{j=1}^{4} n_j = n_0$; $p = \sum\limits_{j=1}^{4}(2j-1)n_j$; $x = (x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^{n_0}$, де $x_j = (x_{j1}, \dots, x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$. Для $x, s \in \mathbb{R}^{n_0}$ маємо $(x, s) = \sum\limits_{j=1}^{4}\sum\limits_{m=1}^{n_j} x_{jm}s_{jm}$. Всюди далі будемо використовувати позначення $\bar{x}_j = (x_{j1}, \dots, x_{jn_{j+1}})$, $\bar{\bar{x}}_j = (x_{j1}, \dots, x_{jn_{j+2}})$, $x'_j = (x_{j1}, \dots, x_{jn_4})$, $x''_j = (x_{jn_4+1}, \dots, x_{jn_3})$, $x'''_j = (x_{jn_3+1}, \dots, x_{jn_2})$, $x^*_j = (x_{jn_{j+1}+1}, \dots, x_{jn_j})$, $x' = (x'_1, x'_2, x'_3, x_4)$, $x^* = (x^*_1, x^*_2, x^*_3, x_4)$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30.
Ключові слова і фрази: фундаментальна матриця розв'язків, рівняння Колмогорова, ультрапараболічні системи.

Нехай

$$\rho(t,x;\tau,\xi) = |x_1-\xi_1|^2/4(t-\tau) + 3|x_2 + (\bar{x}_1+\bar{\xi}_1)(t-\tau)/2 - \xi_2|^2(t-\tau)^{-3}$$

$$+180|x_3+(t-\tau)(\bar{x}_2+\bar{\xi}_2)/2+(\bar{\bar{x}}_1-\bar{\bar{\xi}}_1)(t-\tau)^2/12-\xi_3|^2(t-\tau)^{-5}+63000|x_4+(\bar{x}_3+\bar{\xi}_3)(t-\tau)/2$$

$$+(\bar{\bar{x}}_2-\bar{\bar{\xi}}_2)(t-\tau)^2/10+(\bar{\bar{x}}_1+\bar{\bar{\xi}}_1)(t-\tau)^3/120+\xi_4|^2(t-\tau)^{-7}, \quad \xi \in \mathbb{R}^{n_0}.$$

$$d(t,x;\tau,y) = \sum_{j=1}^{4} |x_j - y_j|^2 (t-\tau)^{-(2j-1)}.$$

Розглянемо систему рівнянь виду

$$\partial_t u_r(t,x) - \sum_{j=1}^{3}\sum_{m=1}^{n_{j+1}} x_{jm}\partial_{x_{j+1}m} u_r(t,x) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k,m=1}^{n_1}[a^{rl}_{km}(t,x)\partial^2_{x_{1m}x_{1k}} \tag{1}$$

$$+a^{rl}_m(t,x)\partial_{x_{1m}} + a^{rl}_0(t,x)]u_l(t,x), \qquad r = 1,\dots,n, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]},$$

де $\Pi_{(0,T]} = \{(t,x), t \in (0,T], T > 0, x \in \mathbb{R}^{n_0}\}$. Припускатимемо, що коефіцієнти $a^{rl}_{km}(t,x)$, $a^{rl}_m(t,x)$, $a^{rl}_0(t,x)$ цієї системи комплекснозначні функції і такі, що система

$$\partial_t w_r(t,x) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k,m=1}^{n_1}[a^{rl}_{km}(t,x)\partial^2_{x_{1m}x_{1k}} + a^{rl}_m(t,x)\partial_{x_{1m}} + a^{rl}_0(t,x)]w_l(t,x), \quad r = 1,\dots,n, \tag{2}$$

є рівномірно параболічною за Петровським у замиканні $\Pi_{[0,T]}$ множини $\Pi_{(0,T]}$, в якій (x_2, x_3, x_4) вважаються параметрами.

Для зручності запишемо систему (1) у матричній формі

$$\partial_t u(t,x) - \sum_{j=1}^{3} \bar{x}_j \partial_{x_{j+1}} u(t,x) = \sum_{|k|\leq 2} a_k(t,x)\partial^k_{x_1} u(t,x).$$

Знайдемо розв'язок системи (1), який задовольняє початкову умову

$$u(t,x)|_{t=\tau} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^{n_0}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T. \tag{3}$$

де τ — задане число, $u_0(x) := col(u_{01}(x), \dots, u_{0n}(x))$ — задана матриця-стовпчик.

Означення. *Під ФМРЗК (1), (3) будемо розуміти квадратну матрицю* $G(t,x;\tau,y)$, $\{x,y\} \subset \mathbb{R}^{n_0}, 0 \leq \tau < t \leq T$, *порядку* n *таку, що для будь-якої гладкої фінітної функції* $u_0(x)$ *та довільного* $\tau \in [0,T]$ *формула* $u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n_0}} G(t,x;\tau,y)u_0(y)dy$, $(t,x) \in \Pi_{(\tau,T]}$, *визначає розв'язок системи (1), який задовольняє початкову умову (3).*

2 Розв'язання задачі Коші для системи із коефіцієнтами залежними тільки від t

Розглянемо задачу Коші для системи (1), в якої коефіцієнти $a^{rl}_{km}(t), a^{lr}_m(t), a^{lr}_0(t)$ — неперервні функції на $[0,T]$

$$\partial_t u_r(t,x) - \sum_{j=1}^{3}\sum_{m=1}^{n_{j+1}} x_{jm}\partial_{x_{j+1m}} u_r(t,x) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k,m=1}^{n_1}[a_{km}^{rl}(t)\partial^2_{x_{1m}x_{1k}} \tag{4}$$

$$+a_m^{rl}(t)\partial_{x_{1m}} + a_0^{rl}(t)]u_l(t,x), \quad 0 \le \tau < t \le T,\ x \in \mathbb{R}^{n_0},\ r = 1,\dots,n,$$

$$u_r(t,x)|_{t=\tau} = u_{0r}(x), x \in \mathbb{R}^{n_0}, r = 1,\dots,n, \tag{5}$$

де $u_{0r}(x)$ — досить гладкі фінітні функції. Оскільки система (2) параболічна, то (див. [1]) корені $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ рівняння $\det\left\{\left(\sum\limits_{k,m=1}^{n_1} a_{km}^{rl}(t)(is_{1k})(is_{1m})\right)_{r,l=1}^{n} - \lambda I\right\} = 0$, де I — одинична матриця порядку n, i — уявна одиниця, задовольняють умову $\mathrm{Re}\,\lambda_r(t,s_1) \le -\delta_0|s_1|^2$, $s_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $r = 1,\dots,n$ з деякою сталою $\delta_0 > 0$, незалежною від $t, 0 \le t \le T$.

Будемо вважати, що виконуються умови Лаппо-Данилевського для такої матриці $\sum\limits_{|k|=2} a_k(t_0)(iP_1(t,s^*,c))^k$ для будь-якого фіксованого $t_0 \in [0,T]$, де

$$P_1(t,s^*,c) := (t^3 s_{41}/6 + t^2c'_{11}/2 + tc'_{21} + c'_{31},\dots,t^3s_{4n_4}/6 + t^2c'_{1n_4}/2 + tc'_{2n_4} + c'_{3n_4};$$

$$t^2 s_{3n_4+1}/2 + tc''_{1n_4+1} + c''_{2n_4+1},\dots,t^2s_{3n_3}/2 + tc''_{1n_3} + c''_{2n_3};$$

$$ts_{2n_3+1} + c'''_{1n_3+1},\dots,ts_{2n_2} + c'''_{1n_2}, s_{1n_2+1},\dots,s_{1n_1}),$$

$c'_{lj}, c''_{kr}, c'''_{1s}$ — дійсні сталі, $l = 1,2,3; k = 1,2; j = 1,\dots,n_4; r = n_4+1,\dots,n_3; s = n_3 + 1,\dots,n_2$.

Зведемо задачу Коші (4), (5) до задачі Коші для систем диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку. Для цього компоненти $u_1,\dots,u_n$ розв'язку задачі Коші (4), (5) будемо шукати у вигляді оберненого перетворення Фур'є по s від невідомих функцій $v_1,\dots,v_n$, тобто

$$u_r(t,x) := F^{-1}[v_r(t,s)](t,x) := (2\pi)^{-n_0}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_0}} \exp\{i(x,s)\}v_r(t,s)ds,$$

$0 \le \tau < t \le T, x \in \mathbb{R}^{n_0}, r = 1,\dots,n$. Враховуючи рівності $\partial_t F^{-1}[v_r] = F^{-1}[\partial_t v_r]$, $x_{jm}\partial_{x_{j+1,m}}F^{-1}[v_r] = F^{-1}[-s_{j+1,m}\partial_{s_{j,m}}v_r]$, а також $\partial^2_{x_{1k}x_{1m}}F^{-1}[v_r] = F^{-1}[(is_{1m})(is_{1k})v_r] = F^{-1}[-s_{1m}s_{1k}v_r]$, одержимо для $v_1,\dots,v_n$ таку задачу Коші

$$\partial_t v_r(t,s) + \sum_{j=1}^{3}\sum_{m=1}^{n_{j+1}} s_{j+1,m}\partial_{s_{jm}} v_r(t,s) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k,m=1}^{n_1}[-a_{km}^{rl}(t)s_{1m}s_{1k} \tag{6}$$

$$+a_m^{rl}(t)s_{1m}i + a_0^{rl}(t)]v_l(t,s), 0 \le \tau < t \le T, s \in \mathbb{R}^{n_0}, r = 1,\dots,n.$$

$$v_r(t,s)|_{t=\tau} = v_{0r}(s), s \in \mathbb{R}^{n_0}, r = 1,\dots,n, \tag{7}$$

Оскільки функції $u_{0r}(x)$ досить гладкі і фінітні, то їх перетворення Фур'є є аналітичними функціями, для яких виконуються нерівності: $|v_{0r}(s)| \le C(1+|s|)^{-m}, s \in \mathbb{R}^{n_0}, m \ge n_0 + 1$, де

$$v_{0r}(s) := F[u_{0r}(x)] = \int_{\mathbb{R}^{n_0}} \exp\{-i(x,s)\}u_{0r}(x)dx. \tag{8}$$

У задачі (6), (7) s^* — параметр. Система (6) є системою диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку, які мають однакові головні частини. Згідно з [2, с. 146–148] така система еквівалентна однорідному лінійному диференціальному рівнянню з частинними похідними першого порядку для функції w від $n + 1 + n_0 - n_1$ незалежних змінних $t, s_{11},\dots,s_{1n_2}, s_{21},\dots,s_{2n_3}, s_{31},\dots,s_{3n_4}, v_1,\dots,v_n$

$$\partial_t w + \sum_{j=1}^{3}\sum_{m=1}^{n_{j+1}} s_{j+1,m}\partial_{s_{jm}} w - \sum_{r,l=1}^{n}\sum_{k,m=1}^{n_1}[-a_{km}^{rl}(t)s_{1m}s_{1k} + ia_m^{rl}(t)s_{1m} + a_0^{rl}(t)]v_r\partial_{v_l} w = 0,$$

яке в свою чергу, як відомо, еквівалентно системі звичайних диференціальних рівнянь

$$dt = \frac{ds_{11}}{s_{21}} = \dots = \frac{ds_{1n_2}}{s_{2n_2}} = \frac{ds_{21}}{s_{31}} = \dots = \frac{ds_{2n_3}}{s_{3n_3}} = \frac{ds_{31}}{s_{41}} = \dots = \frac{ds_{3n_4}}{s_{4n_4}}$$

$$= \frac{dv_1}{\sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{k,m=1}^{n_1}[-a_{km}^{1l}(t)s_{1m}s_{1k} + ia_m^{1l}(t)s_{1m} + a_0^{1l}(t)]v_l}$$

$$= \dots = \frac{dv_n}{\sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{k,m=1}^{n_1}[-a_{km}^{nl}(t)s_{1m}s_{1k} + ia_m^{nl}(t)s_{1m} + a_0^{nl}(t)]v_l}.$$

З цієї системи виділимо $\sum\limits_{j=2}^{4} n_j + n + 1$ рівнянь для знаходження $\sum\limits_{j=2}^{4} n_j + n + 1$ незалежних інтегралів. З рівнянь $dt = \frac{ds_{3j}}{s_{4j}}, j = 1,\dots,n_4$, знаходимо

$$s_{3j} = ts_{4j} + c'_{1j}, j = 1,\dots,n_4, \tag{9}$$

із $dt = \frac{ds_{2j}}{s_{3j}}, j = 1,\dots,n_4$, враховуючи (9), маємо

$$s_{2j} = t^2 s_{4j}/2 + tc'_{1j} + c'_{2j}, \tag{10}$$

а із $dt = ds_{1j}/s_{2j}, j = 1,\dots,n_4$ і (10) одержимо

$$s_{1j} = t^3 s_{4j}/6 + t^2c'_{1j}/2 + tc'_{2j} + c'_{3j}. \tag{11}$$

При $j = n_4 + 1,\dots,n_3$ із $dt = ds_{2j}/s_{3j}$ маємо

$$s_{2j} = ts_{3j} + c''_{1j}, \tag{12}$$

тому із $dt = ds_{1j}/s_{2j}$ при $j = n_4 + 1,\dots,n_3$

$$s_{1j} = t^2 s_{3j}/2 + tc''_{1j} + c''_{2j}. \tag{13}$$

Розглядаючи $j = n_3 + 1,\dots,n_2$, із $dt = ds_{1j}/s_{2j}$ одержимо

$$s_{1j} = ts_{2j} + c'''_{1j}. \tag{14}$$

Враховуючи (9)–(14), запишемо

$$s_1 = (s_{11},\dots,s_{1n_1}) = (t^3s_{41}/6 + t^2c'_{11}/2 + tc'_{21} + c'_{31},\dots,t^3s_{4n_4}/6 + t^2c'_{1n_4}/2 + tc'_{2n_4} + c'_{3n_4},$$
$$t^2s_{3n_4+1}/2 + tc''_{1n_4+1} + c''_{2n_4+1},\dots,t^2s_{3n_3}/2 + tc''_{1n_3} + c''_{2n_3}, ts_{2n_3+1} + c'''_{1n_3+1},\dots,$$
$$ts_{2n_2} + c'''_{1n_2}, s_{1n_2+1},\dots,s_{1n_1}) := P_1(t,s^*,c), \tag{15}$$

$$s_2 = (s_{21},\dots,s_{2n_2}) = (t^2s_{41}/2 + tc'_{11} + c'_{21},\dots,t^2s_{4n_4}/2 + tc'_{1n_4} + c'_{2n_4}, ts_{3n_4+1}+$$
$$+c''_{1n_4+1},\dots,ts_{3n_3} + c''_{1n_3}, s_{2n_3+1},\dots,s_{2n_2}) := P_2(t,s^*,c), \tag{16}$$

$$s_3 = (ts_{41} + c'_{11},\dots,ts_{4n_4} + c'_{1n_4}, s_{3n_4+1},\dots,s_{3n_3}) := P_3(t,s^*,c), s_4 \in \mathbb{R}^{n_4}. \tag{17}$$

Нехай $P(t,s^*,c) := (P_1(t,s^*,c), P_2(t,s^*,c), P_3(t,s^*,c)), c := (c',c'',c''')$.

Підставимо (15)–(17) в систему рівнянь $dv = \sum_{|k|\le 2} a_k(t)(is_1)^k vdt$, одержимо систему рівнянь на характеристиках (9)–(14)

$$dv(t,P(t,s^*,c),s_4) = \sum_{|k|\le 2} a_k(t)(iP_1(t,s^*,c))^k vdt \tag{18}$$

з початковою умовою

$$v(t,P(t,s^*,c),s_4)|_{t=\tau} = v_0(P(\tau,s^*,c),s_4). \tag{19}$$

Задача Коші (18), (19) має єдиний розв'язок для $0 \le \tau < t \le T < +\infty$ і має вигляд

$$v(t,P(t,s^*,c),s_4) = Q(t,\tau,P(t,s^*,c),s_4)v_0(P(\tau,s^*,c),s_4), 0 \le \tau < t \le T, \tag{20}$$

де $Q(t,\tau,P(t,s^*,c),s_4)$ — нормальна фундаментальна матриця розв'язків системи (18), $Q(t,\tau,P(t,s^*,c),s_4)|_{t=\tau} = I$.

Знайдемо c',c'',c''' із (9)–(14):

$$c'_{1j} = s_{3j} - ts_{41}, c'_{2j} = s_{2j} - ts_{3j} + t^2s_{4j}/2,$$
$$c'_{3j} = s_{1j} - ts_{2j} + t^2s_{3j}/2 - t^3s_{4j}/6, j = 1,\dots,n_4, \tag{21}$$

$$c''_{1j} = s_{2j} - ts_{3j}, c''_{2j} = s_{1j} - ts_{2j} + t^2s_{3j}/2, j = n_4+1,\dots,n_3, \tag{22}$$

$$c'''_{1j} = s_{1j} - ts_{2j}, j = n_3+1,\dots,n_2. \tag{23}$$

Підставивши (21)–(23) в $P_1(\tau,s^*,c)$, маємо

$$\tau^3s_{4j}/6 + c'_{1j}\tau^2 + c'_{2j}\tau + c'_{3j} = s_{1j} - (t-\tau)s_{2j} + (t-\tau)^2s_{3j}/2 - (t-\tau)^3s_{1j}/6,$$
$$j = 1,\dots,n_4; \tau^2s_{3j}/2 + c''_{1j}\tau + c'_{2j} = s_{1j} - (t-\tau)s_{2j} + (t-\tau)^2s_{3j}/2,$$
$$j = n_4+1,\dots,n_3; \tau s_{2j} + c'''_{1j} = s_{1j} - (t-\tau), j = n_3+1,\dots,n_2. \tag{24}$$

Аналогічно підставивши (21)–(23) в $P_2(\tau,s^*,c)$, $P_3(\tau,s^*,c)$, одержимо

$$\tau^2s_{4j}/2 + c'_{1j}\tau + c'_{2j} = s_{2j} - (t-\tau)s_{3j} + (t-\tau)^2s_{4j}/2, j = 1,\dots,n_4;$$
$$\tau s_{3j} + c''_{1j} = s_{2j} - (t-\tau)s_{3j}, j = n_4+1,\dots,n_3;$$
$$\tau s_{4j} + c'_{1j} = s_j - (t-\tau)s_{4j}, j = 1,\dots,n_4, \tag{25}$$

Враховуючи (24), (25), одержимо

$$v(t,s) = Q(t,\tau,s)v_0(s'_1 - (t-\tau)s'_2 + (t-\tau)^2s'_3/2 - (t-\tau)^3s_4/6,$$
$$s''_1 - (t-\tau)s''_2 + (t-\tau)^2s^*_3/2, s'''_1 - (t-\tau)s^*_2, s^*_1, s'_2 - (t-\tau)s'_3 + (t-\tau)^2s_4/2,$$
$$s''_2 + (t-\tau)s^*_3, s^*_2, s'_3 - (t-\tau)s_4, s^*_3, s_4). \tag{26}$$

За побудовою, ця формула виражає розв'язок задачі Коші для системи (6) з початковою умовою (7). Далі обґрунтуємо, що $u(t,x)$ — розв'язок задачі (4), (5) має вигляд

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n_0}\int_{R^{n_0}} \exp xQ(t,\tau,s)v_0(s'_1 - (t-\tau)s'_2 + (t-\tau)^2s'_3/2$$
$$-(t-\tau)^3s_4/6, s''_1 - (t-\tau)s''_2 + (t-\tau)^2s^*_3/2, s'''_1 - (t-\tau)s^*_2, s^*_1, s'_2 - (t-\tau)s'_3$$
$$+(t-\tau)^2s_4/2, s''_2 - (t-\tau)s^*_3, s^*_2, s'_3 - (t-\tau)s_4, s^*_3, s_4)ds. \tag{27}$$

У інтегралі (27) зробивши заміну змінних $s'_1 - (t-\tau)s'_2 + (t-\tau)^2s'_3/2 - (t-\tau)^3s_1/6 = y'_1$, $s''_1 - (t-\tau)s''_2 + (t-\tau)^2s^*_3/2 = y''_1$, $s'''_1 - (t-\tau)s^*_2 = y'''_1$, $s^*_1 = y^*_1$, $s'_2 - (t-\tau)s'_3 + (t-\tau)^2s_4/2 = y'_2$, $s''_2 - (t-\tau)s^*_3 = y''_2$, $s^*_2 = y^*_2$, $s'_3 - (t-\tau)s_4 = y'_3$, $s^*_3 = y^*_3$, $s_4 = y_4$, матимемо

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n_0}\int_{R^{n_0}} \exp\{i(x_1,y_1) + i(x_2 + \bar{x}_1(t-\tau),y_2) + i(x_3 + \bar{x}_2(t-\tau)$$
$$+(t-\tau)^2\bar{\bar{x}}_1/2, y_3) + i(x_4 + \bar{x}_3(t-\tau) + \bar{\bar{x}}_2(t-\tau)^2/2 + x'_1(t-\tau)^3/6, y_4)\}$$
$$\times Q(t,\tau;B(t,\tau,y))v_0(y)dy, \tag{28}$$

де $B(t,\tau,y) := (y'_1 + (t-\tau)y'_2 + y'_3(t-\tau)^2/2 + y_4(t-\tau)^3/6, y''_1 + (t-\tau)y''_2 + y^*_3(t-\tau)^2/2;$ $y'''_1 + (t-\tau)y^*_2, y^*_1, y'_2 - (t-\tau)y'_3 + (t-\tau)^2y_4/2, y''_2 + (t-\tau)y^*_3, y^*_2, y'_3 + (t-\tau)y_4, y^*_3, y_4)$.

Інтеграли (27), (28) одночасно збіжні або розбіжні. Далі буде доведено оцінку

$$|Q(t,\tau;B(t,\tau,y))| \le A\exp\{-c_0\sum_{j=1}^{4}|y_j|^2(t-\tau)^{2j-1}\}. \tag{29}$$

з деякими сталими $A > 0, c_0 > 0$. Внаслідок виконання (29) є збіжність (28), можливість в (27) диференціювання під знаком інтеграла, а також граничного переходу $u(t,x) \to F^{-1}Fu_0 = u_0$ при $t \to \tau^+$.

Скориставшись виразом (8), оцінкою (29) і змінивши порядок інтегрування у формулі (28), одержимо

$$u(t,x) = \int_{R^{n_0}} G(t,x;\tau,\xi)u_0(\xi)d\xi, 0 \le \tau < t \le T, \{\xi,x\} \subset R^{n_0}, \tag{30}$$

де

$$G(t,x;\tau,\xi) = (2\pi)^{-n_0}\int_{R^{n_0}} \exp\{i((x_1-\xi_1),y_1) + i((x_2 + \bar{x}_1(t-\tau) - \xi_2),y_2)$$
$$+i((x_3 - \xi_3 + \bar{x}_2(t-\tau) + \bar{\bar{x}}_1(t-\tau)^2/2),y_3) + i((x_4 - \xi_4 + \bar{x}_3(t-\tau)$$
$$+\bar{\bar{x}}_2(t-\tau)^2/2 + x'_1(t-\tau)^3/6),y_4)\}Q(t,\tau;B(t,\tau,y))dy.$$

3 Доведення оцінки (29) у випадку сталих коефіцієнтів системи (6)

Розглянемо систему рівнянь виду
$$dv(t,P(t,s^*,c),s_4)=\sum_{|k|=2}a_k(iP_1(t,s^*,c))^k v(t,P(t,s^*,c),s_4)dt$$
таку, що
$$\sum_{|k|=2}a_k(iP_1(t,s^*,c))^k\int_\tau^t\sum_{|k|=2}a_k(iP_1(\beta,s^*,c))^k d\beta=\int_\tau^t\sum_{|k|=2}a_k(iP_1(\beta,s^*,c))^k d\beta$$
$$\times\sum_{|k|=2}a_k(iP_1(t,s^*,c))^k. \tag{31}$$

Якщо $n_1=n_2=n_3=1$, то (31) завжди виконується. Як вище доведено, розв'язок задачі Коші для такої системи рівнянь запишеться у вигляді (20)
$$v(t,P(t,s^*,c),s_4)=Q(t,\tau;P(t,s^*,c),s_4)v_0(P(\tau,s^*,c),s_4),$$
але оскільки виконується (31), то
$$Q(t,\tau;P(t,s^*,c),s_4)=\exp\Big\{\int_\tau^t\sum_{|k|=2}a_k(iP_1(\beta,s^*,c))^k d\beta\Big\}.$$

Враховуючи (22)–(25), одержимо (26) з $Q(t,\tau,s)=\exp\{-\sum\limits_{|k|=2}a_k\int\limits_\tau^t(\alpha(t-\beta,s))^k d\beta\}$, де $\alpha(t-\tau,s):=(s_1'-(t-\tau)s_2'+(t-\tau)^2s_3'/2-(t-\tau)^3s_4/6,\ s_1''-(t-\tau)s_2''+(t-\tau)^2s_3^*/2,$ $s_1'''-(t-\tau)s_2^*,s_1^*)$.

А відповідно $Q(t,\tau;B(t,\tau,y))$ має вигляд
$$Q(t,\tau;B(t,\tau,y))=\exp\Big\{-\sum_{|k|=2}a_k\int_\tau^t(B_1(\beta,\tau,y))^k d\beta\Big\}, \tag{32}$$
де $B_1(t,\tau,y):=(y_1'+(t-\tau)y_2'+(t-\tau)^2y_3'/2+(t-\tau)^3y_4/6,y_1''+(t-\tau)s_2''+(t-\tau)^2y_3^*/2,$ $y_1'''+(t-\tau)y_2^*,y_1^*)$.

Обчислимо всі можливі інтеграли, що містяться в $\int\limits_\tau^t(B_1(\beta,\tau))^k d\beta$. Зробимо заміну змінних $\beta-\tau=\theta(t-\tau)$ і перепозначимо $y_j(t-\tau)^{(2j-1)/2}=\sigma_j$, $j=1,\dots,4$. Тоді $\int\limits_\tau^t(B_1(\beta,\tau))^k d\beta=\int\limits_0^1 B_1^k(\theta(t-\tau),\sigma_1(t-\tau)^{-1/2},\sigma_2(t-\tau)^{-3/2},\sigma_3(t-\tau)^{-5/2},\sigma_4(t-\tau)^{-7/2})d\theta(t-\tau)$.

У випадку $|k|=2$ маємо інтеграли
$$\int_0^1(\sigma_{1j}+\sigma_{2j}p_1\theta+\sigma_{3j}p_2\theta^2/2+\sigma_{4j}p_3\theta^3/6)(\sigma_{1m}+\sigma_{2m}q_1\theta+\sigma_{3m}q_2\theta^2/2$$
$$+\sigma_{4m}q_3\theta^3/6)d\theta=(\sigma_{1j}+p_1\sigma_{2j}/2+p_2\sigma_{3j}/6+p_3\sigma_{4j}/24)(\sigma_{1m}+q_1\sigma_{2m}/2$$
$$+q_2\sigma_{3m}/6+q_3\sigma_{4m}/24)+(\sigma_{2m}q_1+\sigma_{3m}q_2/2+3q_3\sigma_{4m}/20)(\sigma_{2j}p_1+\sigma_{3j}p_2/2$$
$$+3\sigma_{4j}p_3/20)/12+\frac{(\sigma_{3m}q_2+\sigma_{4m}q_3/2)(p_2\sigma_{3j}+p_3\sigma_{4j}/2)}{720}+\frac{p_3q_3\sigma_{4m}\sigma_{4j}}{25200}, \tag{33}$$

де, якщо

1) $(p_1,p_2,p_3)=(q_1,q_2,q_3)=(1,1,1)$, то $m,j=1,\dots,n_4$;

2) $(p_1,p_2,p_3)=(1,1,1),(q_1,q_2,q_3)=(1,1,0)$, то $m=n_4+1,\dots,n_3,j=1,\dots,n_4$;

3) $(p_1,p_2,p_3)=(1,1,1),(q_1,q_2,q_3)=(1,0,0)$, то $m=n_3+1,\dots,n_2$, $j=1,\dots,n_4$;

4) $(p_1,p_2,p_3)=(1,1,1),(q_1,q_2,q_3)=(0,0,0)$, то $m=n_2+1,\dots,n_1,j=1,\dots,n_4$;

5) $(p_1,p_2,p_3)=(1,1,0),(q_1,q_2,q_3)=(1,1,0)$, то $m,j=n_4+1,\dots,n_3$;

6) $(p_1,p_2,p_3)=(1,0,0),(q_1,q_2,q_3)=(1,1,0)$, то $m=n_4+1,\dots,n_3$, $j=n_3+1,\dots,n_2$;

7) $(p_1,p_2,p_3)=(q_1,q_2,q_3)=(1,1,0)$, то $m,j=n_3+1,\dots,n_2$;

8) $(p_1,p_2,p_3)=(0,0,0),(q_1,q_2,q_3)=(1,0,0)$, то $j=n_2+1,\dots,n_1$, $m=n_3+1,\dots,n_2$;

9) $(p_1,p_2,p_3)=(q_1,q_2,q_3)=(0,0,0)$, то $m,j=n_2+1,\dots,n_1$.

Проаналізувавши вираз (33), прийдемо до висновку, що, підставивши в $\sum\limits_{|k|=2}a_k(is_1)^k$ замість s_1 вектори μ,ν,ω,z з відповідними компонентами

$\mu:\sigma_{1j}+\sigma_{2j}/2+\sigma_{3j}/6+\sigma_{4j}/24,j=1,\dots,n_4,\sigma_{1j}+\sigma_{2j}/2+\sigma_{3j}/6,j=n_4+1,\dots,n_3,$ $\sigma_{1j}+\sigma_{2j}/2,j=n_3+1,\dots,n_2,\sigma_{1j}^*,j=n_2+1,\dots,n_1$;

$\nu:\frac{1}{2\sqrt3}(\sigma_{2j}+\sigma_{3j}/2+3\sigma_{4j}/20),j=1,\dots,n_4,\frac{1}{2\sqrt3}(\sigma_{2j}+\sigma_{3j}/2),j=n_4+1,\dots,n_3,$ $\sigma_{2j},j=n_3+1,\dots,n_2,\nu_{n_2+1}=0,\dots,\nu_{n_1}=0$;

$\omega:\frac{1}{12\sqrt3}\sigma_{4j}/2,j=1,\dots,n_4,\omega_{n_3+1}=0,\dots,\omega_{n_1}=0$;

$z:\frac{1}{60\sqrt7}(\sigma_{3j}+\sigma_{4j}/2,j=1,\dots,n_4,\frac{1}{12\sqrt3}\sigma_{3j},j=n_4+1,\dots,n_3,\sigma_{2j},j=n_3+1,\dots,n_4,$ $z_{n_4+1}=0,\dots,z_{n_1}=0,$

і додавши результати, одержимо наступну рівність $\sum\limits_{|k|=2}a_ki^k(\mu^k+\nu^k+\omega^k+z^k)=$ $\sum\limits_{|k|=2}a_ki^k\int\limits_0^1 B_1\Big(\theta(t-\tau),\sigma_1(t-\tau)^{-1/2},\sigma_2(t-\tau)^{-3/2},\sigma_3(t-\tau)^{-5/2},\sigma_4(t-\tau)^{-7/2}\Big)d\theta(t-\tau)$.

Оскільки, використавши параболічність, маємо $\operatorname{Re}\lambda(\mu)\le-\delta_0|\mu|^2$, то $\operatorname{Re}\lambda(\mu)\le$ $-\delta_0\Big(|\sigma_1^*|^2+|\sigma_1'''+\sigma_2^*/2|^2+|\sigma_1''+\sigma_2''/2+\sigma_3/6|^2+|\sigma_1'+\sigma_2'/2+\sigma_3'/6+\sigma_4/24|^2\Big)$. Аналогічно $\operatorname{Re}\lambda(\nu)\le-\delta_0\Big(|\sigma_{2j}'+\sigma_{3j}'/2+3\sigma_4/20|^2+|\sigma_2''+\sigma_3^*/2|^2+|\sigma_2^*/2|^2\Big)/12$; $\operatorname{Re}\lambda(\omega)\le$ $-\delta_0\Big(|\sigma_3'+\sigma_4/2|^2+|\sigma_3^*|^2\Big)/720$; $\operatorname{Re}\lambda(z)\le-\delta_0|\sigma_4|^2/252000$.

Враховуючи оцінки $\operatorname{Re}\lambda$, одержимо оцінку матриці $Q(t,\tau,\sigma)$
$$|\exp\sum_{|k|\le2}a_ki^k(\mu^k+\nu^k+\omega^k+z^k)|\le C\exp\Big\{-\delta_1\big[|\sigma_1^*|^2+|\sigma_1'''+\sigma_2^*/2|^2$$
$$+|\sigma_1''+\sigma_2''/2+\sigma_3^*/6|^2+|\sigma_1'+\sigma_2'/2+\sigma_3'/6+\sigma_4/24|^2+|\sigma_2'+\sigma_3'/2+3\sigma_4/20|^2$$
$$+|\sigma_2''+\sigma_3^*/2|^2+|\sigma_2^*/2|^2/12+|\sigma_3'+\sigma_4/2|^2+|\sigma_3^*|^2/720+|\sigma_4|^2/25200\big]\Big\}.$$

Звідси маємо (29), де $c_0=\delta_1/25200$, $0<\delta_1<\delta_0$, $C>0$.

4 Встановлення оцінки (29) у випадку коефіцієнтів залежних лише від t

Для встановлення оцінки (29), використаємо підхід, застосований в [1], [4]. Розглянемо систему

$$\frac{dQ(t,\tau,B(t,\tau,y))}{dt}=\sum_{|k|=2}a_k(t_0)(iB_1(t,\tau,y))^kQ(t,\tau,B(t,\tau,y))$$
$$+\Big\{\sum_{|k|=2}[a_k(t)-a_k(t_0)](iB_1(t,\tau,y))^k+\sum_{|k|<2}a_k(t)(iB_1(t,\tau,y))^k\Big\}Q(t,\tau,B(t,\tau,y)),$$

де $0\le\tau<t\le T, y\in R^{n_0}$. $Q(t,\tau,B(t,\tau,y))|_{t=\tau}=I$, тоді

$$Q(t,\tau,B(t,\tau,y))=\exp\{\sum_{|k|=2}a_k(t_0)\int_{t_0}^t(iB_1(\beta,\tau,y))^kd\beta\}\}Q(t_0,\tau,B(t,\tau,y))$$
$$+\int_{t_0}^t\exp\{\sum_{|k|=2}a_k(t_0)\int_\beta^t(iB_1(\beta,\tau,y))^kd\beta\}\times[\sum_{|k|=2}(a_k(\beta)-a_k(t_0))$$
$$+\sum_{|k|<2}(a_k(\beta)](iB_1(\beta,\tau,y))^kQ(\beta,\tau,B(\beta,\tau,y))d\beta.$$

Виберемо довільне $\varepsilon>0$ і знайдемо таке $\delta(\varepsilon)$, щоб для всіх t,t_0 таких, що $|t-t_0|<\delta(\varepsilon)$ виконувалася нерівність $|a_k(t)-a_k(t_0)|<\varepsilon$. Крім того $|\sum\limits_{|k|<2}a_k(t)(iB_1(t,\tau,y))^k|\le\varepsilon|B_1(t,\tau,y)|^2$ при $|B_1(t,\tau,y)|>R>0$, тому

$$|Q(t,\tau,B(t,\tau,y))|\le|\exp\{-\sum_{|k|=2}a_k(t_0)\int_{t_0}^t(B_1^k(\beta,\tau,y)d\beta\}Q(t_0,\tau,B(t_0,\tau,y))|$$
$$+\int_{t_0}^t|\exp\{-\sum_{|k|=2}a_k(t_0)\int_\beta^tB_1^k(\gamma,\tau,y)d\gamma\}|2\varepsilon|B_1(\beta,\tau,y)|^2|Q(\beta,\tau,B(\beta,\tau,y))|d\beta.$$

Використавши лему Гронуолла, одержимо наступну нерівність $|Q(t,\tau,B(t,\tau,y))|\le c_1|Q(t_0,\tau,B(t_0,\tau,y))|\exp\Big\{-\sum\limits_{|k|=2}a_k(t_0)\int_{t_0}^tB_1^k(\beta,\tau,y)d\beta\Big\}\exp\Big\{2\varepsilon\int_{t_0}^t|B_1(\beta,\tau,y)|^2d\beta\Big\}$.

Розкривши інтеграли $\int_{t_0}^t|B_1(\beta,\tau,y)|^2d\beta$, використавши параболічність, підібравши ε і звівши подібні, а після чого, записавши показник знову через інтеграл, одержимо

$$|Q(t,\tau,B(t,\tau,y))|\le c_1|Q(t_0,\tau,B(t_0,\tau,y))|\exp\{-\delta_2\int_{t_0}^t|B_1(\beta,\tau,y)|^2d\beta\},0<\delta_2<\delta_0.\quad(34)$$

Ввівши розбиття, $t_0=\tau,\ldots,\tau+\delta(\varepsilon),\ldots\tau+m_1\delta(\varepsilon),m_1=[\frac{T}{\varepsilon}]+2,c_1\ge1$, послідовно оцінюючи $Q(t,\tau,B(t,\tau,y))$ через (34), одержимо оцінку

$$|Q(t,\tau,B(t,\tau,y))|\le c_1^{m_1}\exp\{-\delta_2\int_\tau^t|B_1(\beta,\tau,y)|^2d\beta\}.\quad(35)$$

Звідси, використавши (33), одержимо (29).

Як і в [1] можна довести оцінку для $Q(t,\tau,B(t,\tau,y+i\tilde y)),\tilde y\in R^{n_0}$.

$$|Q(t,\tau,B(t,\tau,y+i\tilde y))|\le C\exp\Big\{\int_\tau^t(-\delta_3|B(\beta,\tau,y)|^2+c_1|B(\beta,\tau,\tilde y)|^2)d\beta\Big\},\quad(36)$$

де $0<\delta_3<\delta_2$, $c_1>0$. $C>0$, c_1,C залежать від T, n; δ_0, $\sup|a_k(t)|$, $\{y,\tilde y\}\in\mathbb{R}^{n_0}$.

5 Аналітичний опис ФМРЗК

Щоб дослідити $G(t,x;\tau,\xi)$, зробимо таку заміну змінних в (31): $\sigma_{1j}+\sigma_{2j}/2+\sigma_{3j}/6+\sigma_{4j}/24=s_{1j},j=1,\ldots,n_4;\sigma_{1j}+\sigma_{2j}/2+\sigma_{3j}/6=s_{1j},j=n_4+1,\ldots,n_3;\sigma_{1j}+\sigma_{2j}/2=s_{1j},j=n_3+1,\ldots,n_2;\sigma_{1j}^*=s_{1j},j=n_2+1,\ldots,n_1;\sigma_{2j}+\sigma_{3j}/2+3\sigma_{4j}/20=s_{2j},j=1,\ldots,n_4;\sigma_{2j}+\sigma_{3j}/2)=s_{2j},j=n_4+1,\ldots,n_3;\sigma_{2j}=s_{2j},j=n_3+1,\ldots,n_2;\sigma_{3j}+\sigma_{4j}/2=s_{3j},j=1,\ldots,n_4;\sigma_{3j}=s_{3j},j=n_4+1,\ldots,n_3;\sigma_{4j}/2=s_{4j},j=1,\ldots,n_4$.

У випадку сталих коефіцієнтів маємо

$$G(t,x;\tau,\xi)=(2\pi)^{-n_0}\int_{R^{n_0}}\exp\{i((x_1-\xi_1)(t-\tau)^{-1/2},s_1)+i(x_2+(\bar x_1+\bar\xi_1)$$
$$\times(t-\tau)/2-\xi_2)(t-\tau)^{-3/2},s_2)+i((x_3+(t-\tau)(\bar x_2+\bar\xi_2)/2+(\bar{\bar x}_1-\bar{\bar\xi}_1)$$
$$\times(t-\tau)^2/12-\xi_3)(t-\tau)^{-5/2},s_3)+i((x_4+(\bar x_3+\bar\xi_3)(t-\tau)/2+(\bar{\bar x}_2-\bar{\bar\xi}_2)$$
$$\times(t-\tau)^2/10+(x_1'+\xi_1')(t-\tau)^3/120-\xi_4)(t-\tau)^{-7/2},s_4)$$
$$+\sum_{|k|\le2}a_ki^k(s_1^k+s_2^k12^{\frac{k}{2}}+s_3^k720^{\frac{k}{2}}+s_4^k25200^{\frac{k}{2}})\}ds(t-\tau)^{-\frac{p}{2}}.\quad(37)$$

Аналізуючи (37), аналогічно як у випадку рівняння типу Колмогорова з сталими коефіцієнтами, інерція якого залежить від трьох груп змінних [3], одержимо аналітичний опис ФМРЗК.

У загальному випадку, використовуючи (35), (36), (30), (32), (33), одержимо твердження:

Теорема. *Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші системи* (4) *має вигляд* $G(t,x;\tau,\xi)=(t-\tau)^{-\frac{p}{2}}\Omega\Big(t,\tau;(x_1-\xi_1)(t-\tau)^{-1/2},(x_2-\xi_2+(\bar x_1+\bar\xi_1)(t-\tau)/2)(t-\tau)^{-3/2},(x_3-\xi_3+(t-\tau)(\bar x_2+\bar\xi_2)/2+(\bar{\bar x}_1-\bar{\bar\xi}_1)(t-\tau)^2/12)(t-\tau)^{-5/2},(x_4-\xi_4+(\bar x_3+\bar\xi_3)(t-\tau)/2+(\bar{\bar x}_2-\bar{\bar\xi}_2)(t-\tau)^2/10+(x_1'+\xi_1')(t-\tau)^3/120-\xi_4)(t-\tau)^{-7/2}\Big)$, *де* $\Omega(t,\tau,z_1,z_2,z_3,z_4)$ *при фіксованих* t, τ *є цілою функцією аргументів* $z_1,\ldots z_4$, *порядку зростання 2 при комплексних значеннях цих аргументів і такого ж самого порядку спадання при їх дійсних значеннях.*

Для похідних справджуються оцінки

$$|\partial_x^m\partial_\xi^lG(t,x+iy;\tau,\xi)|\le C_{ml}(t-\tau)^{-M_{ml}}\exp\{-c_0\rho(t,x;\tau,\xi)+F_1d(t,y;\tau,0)\};$$
$$|(\partial_t-\sum_{j=1}^3x_j\partial_{x_j+1})G(t,x+iy;\tau,\xi)|\le C(t-\tau)^{-1-p/2}\exp\{-c_0\rho(t,x;\tau,\xi)+F_1d(t,y;\tau,0)\};$$

$$M_{ml}=\sum_{j=1}^4(2j-1)(n_j+|m_j|+|l_j|)/2,$$

$$|\partial_tG(t,x+iy;\tau,\xi)|\le C_1(t-\tau)^{-p/2}\exp\{-c_0\rho(t,x;\tau,\xi)+F_1d(t,y;\tau,0)\}((t-\tau)^{-1}$$
$$+\sum_{j=1}^3(|x_j|+|\xi_j|)(t-\tau)^{-(2j+1)/2});$$

$\{x,\xi,y\} \subset \mathbb{R}^{n_0}$, $0 \le \tau < t \le T$, де F_1, C_{lm}, C, C_1, c_0 — додатні сталі, залежать від $\sup\limits_{t\in[0,T]} |a_k(t)|$, характеру неперервності $a_k(t), T, n_j, \delta_0$.

Аналогічно як для параболічних систем [1, с. 91–92] можна показати, що існує ФМРЗК спряженої системи до (4), довести оцінки її похідних, нормальність $G(t,x;\tau,\xi)$, формулу згортки і єдиність ФМРЗК.

Література

1. Эйдельман С.Д. Параболические системы. — М.: Наука, 1964. — 443 с.
2. Курант Р. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964. — 830 с.
3. Малицька Г.П. *Побудова фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння дифузії із змінною інерцією* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1999. — Т.42, №3. — С. 56–60.
4. Малицька Г.П. *Системи рівнянь типу Колмогорова* // Укр. мат. журн. — 2008. — Т.12, №3. — С. 1650–1663.
5. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Operator Theory: Adv. and Appl., 152. 2004.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

Надійшло 21.12.2011

Burtnyak I.V., Malytska H.P. *Fundamental matrix of solutions for one class of parabolic degenerate systems*. Carpathian Mathematical Publications, 4, 1 (2012), 12–22.

We consider one class of ultraparabolic equation systems of second order, that have three groups of degenerated variables and coefficients of which depend only on a time variable. We construct the fundamental matrix of Cauchy problem and obtain the estimations of this matrix and of all its derivatives.

Буртняк И.В., Малицкая А.П. *Фундаментальные матрицы решений одного класса вырожденных параболических систем* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 12–22.

Рассмотрен один класс ультрапараболических систем уравнений второго порядка с тремя группами переменных, за которыми есть вырождение и коэффициенты зависят только от временной переменной. Построена фундаментальная матрица решений задачи Коши, получены оценки этой матрицы и всех ее производных.

Карпатські математичні публікації. Т.4, №1 — Carpathian Mathematical Publications. V.4, №1

УДК 517.51

Волошин Г.А.[1], Маслюченко В.К.[1], Нестеренко О.Н.[2]

ПРО АПРОКСИМАЦІЮ ВІДОБРАЖЕНЬ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ У ПРОСТОРІ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Нестеренко О.Н. *Про апроксимацію відображень зі значеннями у просторі неперервних функцій* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — С. 23–27.

З допомогою теореми про апроксимацію одиничного оператора у банаховому просторі $C_u(Y)$ всіх неперервних функцій $g : Y \to \mathbb{R}$, заданих на метризовному компакті Y, з рівномірною нормою доведено, що для топологічного простору X, метризовного компакта Y, всюди щільного в $C_u(Y)$ лінійного підпростору L і нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ існує така послідовність сукупно неперервних функцій $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, що $f_n^x = f(x,\cdot) \in L$ і $f_n^x \to f^x$ в $C_u(Y)$ для кожного $x \in X$.

1 Вступ

Для топологічного простору Y символом $C(Y)$ ми позначаємо векторний простір всіх неперервних функцій $g : Y \to \mathbb{R}$, а через $C_p(Y)$ — локально опуклий простір $(C(Y), \mathcal{T}_p)$ з топологією $\mathcal{T}_p$ поточкової збіжності. Для компактного простору Y через $C_u(Y)$ позначаємо банахів простір $(C(Y), \|\cdot\|)$, де $\|g\| = \max\limits_{y\in Y} |g(y)|$, а через $\mathcal{T}_u$ — топологію рівномірної збіжності на $C(Y)$, що породжена максимум-нормою $\|\cdot\|$.

Нехай X — топологічний простір, Y — компактний простір і $\alpha = p$ або u. Неперервне відображення $\varphi : X \to C_\alpha(Y)$ будемо називати *α-неперервним*. Якщо $\beta = p$ або u, то неперервне відображення $A : C_\alpha(Y) \to C_\beta(Y)$ ми називаємо *$\alpha\beta$-неперервним*. У праці [2] була поставлена проблема $\alpha\beta$: для яких підпросторів L простору $C(Y)$ для кожного α-неперервного відображення $\varphi : X \to C(Y)$ існує така послідовність β-неперервних відображень $\varphi_n : X \to L$, що $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ на X у просторі $C_u(Y)$. У ній же була отримана ствердна відповідь на проблему (uu) для всюди щільних лінійних підпросторів L простору $C_u(Y)$, який має базис Шаудера.

Тут ми показуємо, що, використавши конструкцію з праці [1], для всюди щільних в $C_u(Y)$ лінійних підпросторів L, можна отримати ствердну відповідь і на сильнішу проблему (pu) для довільного метризовного компакта Y.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C30, 65D15.
Ключові слова і фрази: апроксимація, нарізно та сукупно неперервні функції, одиничний оператор.

Далі, в [2] було зауважено, що для довільного всюди щільного лінійного підпростору L банахового простору E з базисом Шаудера існує така послідовність лінійних неперервних операторів $A_n : E \to L$, що $A_n g \to g$ в E для кожного $g \in E$. Тут, використовуючи деякі результати з теорії наближень, для довільного сепарабельного банахового простору E і його всюди щільного лінійного підпростору L ми будуємо таку послідовність неперервних операторів $A_n : E \to L$ (не обов'язково лінійних), що $A_n g \to g$ в E для кожного $g \in E$.

Отримані тут результати істотно доповнюють працю [2]. Їх ми застосовуємо і до апроксимації нарізно неперервних функцій.

2 Апроксимація одиничного оператора в просторі $C(Y)$ pu-неперервними операторами

В праці [1] доведено (теорема 2, імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$), що для кожного метризовного компакта Y існує така послідовність скінченновимірних лінійних pu-неперервних операторів $T_n : C(Y) \to C(Y)$, що $T_n g \to g$ у просторі $C_u(Y)$ для кожного $g \in C(Y)$.

З допомогою наступної леми ми зможемо покращити цей результат.

Лема 2.1. *Нехай L — скрізь щільний лінійний підпростір нормованого простору E, M — скінченновимірний лінійний підпростір E, $J : M \to E$ — тотожне вкладення і $\varepsilon > 0$. Тоді існує такий лінійний неперервний оператор $U : M \to E$, що $U(M) \subseteq L$ і $\|J - U\| \le \varepsilon$.*

Доведення. Нехай $\dim M = m$ і $x_1, \ldots, x_m$ — базис в M. Для кожного $x \in M$ існує такий єдиний набір $\xi_1, \ldots, \xi_m$ скалярів, що $x = \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k x_k$. Функція $\|x\|_\infty = \max\limits_{k=1,\ldots,m} |\xi_k|$ є нормою на M, яка еквівалентна [6, с.157] звуженню на M вихідної норми $\|\cdot\|$ простору E, зокрема, існує така константа $C > 0$, що $\|x\|_\infty \le C\|x\|$ для кожного $x \in M$. Оскільки $\overline{L} = E$, то для кожного $k = 1, \ldots, m$ існує таке $y_k \in L$, що $\|x_k - y_k\| \le \frac{\varepsilon}{Cm}$. Для кожного $x = \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k x_k \in M$ покладемо $Ux = \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k y_k$. Зрозуміло, що $U : M \to E$ — лінійний оператор, для якого $U(M) \subseteq L$. Оскільки простір M скінченновимірний, то лінійний оператор U буде автоматично неперервним (це негайно випливає з ізоморфності всіх скінченновимірних нормованих просторів однакової вимірності [7, с.128]). Для $x = \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k x_k \in M$ будемо мати

$$\|(J-U)x\| = \|\sum_{k=1}^{m} \xi_k (x_k - y_k)\| \le \sum_{k=1}^{m} |\xi_k| \|x_k - y_k\| \le \frac{\varepsilon}{Cm} \cdot \|x\|_\infty \cdot m = \frac{\varepsilon \|x\|_\infty}{C} \le \varepsilon \|x\|,$$

отже, $\|J - U\| \le \varepsilon$. □

Теорема 1. *Нехай Y — метризовний компакт і L — скрізь щільний лінійний підпростір простору $C_u(Y)$. Тоді існує така послідовність лінійних pu-неперервних операторів $A_n : C(Y) \to C(Y)$, що $imA_n \subseteq L$ і $\dim imA_n < \infty$ для кожного n, причому $A_n g \to g$ в $C_u(Y)$ для кожного $g \in C(Y)$.*

Доведення. Використавши згаданий вище результат з [1], побудуємо таку послідовність скінченновимірних лінійних pu-неперервних операторів $T_n : C(Y) \to C(Y)$, що $T_n g \to g$ в $C_u(Y)$ для кожного $g \in C(Y)$. За побудовою простір $M_n = imT_n$ скінченновимірний. Нехай $J_n : M_n \to C_u(Y)$ — тотожне вкладення. Застосовуючи лему 1 до банахового простору $E = C_u(Y)$, для кожного n визначимо такий лінійний неперервний оператор $U_n : M_n \to C_u(Y)$ (M_n наділяється топологією, індукованою з $C_u(Y)$), що $\|J_n - U_n\| \le \frac{1}{n}$ і $imU_n \subseteq L$.

Покладемо $A_n = U_n T_n$ і покажемо, що послідовність операторів A_n є шуканою. Справді, $imA_n \subseteq imU_n = U_n(M_n) \subseteq L$. Тому $imA_n \subseteq L$ і образ imA_n скінченновимірний, адже таким є простір M_n. Оператори A_n лінійні (як композиція таких операторів) і pu-неперервні, адже T_n — pu-неперервний, а U_n — uu-неперервний.

Нехай $g \in C(Y)$. Покажемо, що $\|A_n g - g\| \to 0$. Справді, послідовність елементів $T_n g$ збіжна в $C_u(Y)$ до g, а значить, обмежена в $C_u(Y)$, тобто існує таке число $\gamma > 0$, що $\|T_n g\| \le \gamma$ для кожного n. В такому разі

$$\|A_n g - g\| = \|U_n T_n g - J_n T_n g + T_n g - g\| \le \|(U_n - J_n) T_n g\| + \|T_n g - g\|$$

$$\le \|U_n - J_n\| \|T_n g\| + \|T_n g - g\| \le \frac{\gamma}{n} + \|T_n g - g\| = \alpha_n.$$

Оскільки $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$, то і $\|A_n g - g\| \to 0$, що і треба було довести. □

3 Апроксимація нарізно неперервних функцій

Подамо тут деякі застосування теореми 1.

Теорема 2. *Нехай Y — метризовний компакт, X — довільний топологічний простір, L — скрізь щільний лінійний підпростір банахового простору $C_u(Y)$ і $\varphi : X \to C_p(Y)$ — p-неперервне відображення. Тоді існує така послідовність u-неперервних відображень $\varphi_n : X \to L$, що $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ в $C_u(Y)$ для кожного $x \in X$.*

Доведення. Нехай $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність, побудована в теоремі 1 для підпростору L. Відображення $\varphi_n = A_n \circ \varphi : X \to L$ будуть u-неперервними, оскільки φ — p-неперервне, а A_n — pu-неперервні. Далі, $\varphi_n(x) = A_n \varphi(x) \to \varphi(x)$ у $C_u(Y)$ для кожного $x \in X$. □

Теорема 3. *Нехай X — топологічний простір, Y — метризовний компакт, L — скрізь щільний лінійний підпростір банахового простору $C_u(Y)$ і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ — нарізно неперервна функція. Тоді існує така послідовність сукупно неперервних функцій $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, що $f_n^x = f_n(x, \cdot) \in L$ і $f_n^x \to f^x$ в $C_u(Y)$ для кожного $x \in X$.*

Доведення. Асоційоване з функцією f відображення $\varphi : X \to C_p(Y)$, $\varphi(x) = f^x = f(x, \cdot)$, буде неперервним, тобто p-неперервним, оскільки f — нарізно неперервна функція [2, теорема 1]. За теоремою 2 існує така послідовність u-неперервних відображень $\varphi_n : X \to C(Y)$, що $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ в $C_u(Y)$ для кожного $x \in X$. Функції $f_n(x, y) = \varphi_n(x)(y)$ будуть сукупно неперервними за теоремою 2 з [2]. До того ж $f_n^x = \varphi_n(x) \to \varphi(x) = f^x$ у просторі $C_u(Y)$ для кожного $x \in X$. □

4 Апроксимація одиничного оператора в сепарабельному банаховому просторі

Другий основний результат статті спирається на наступну елементарну лему, в якій використовується поняття строго опуклої норми (див. [4, с.21] або [3, с.25]).

Лема 4.1. *Нехай $(E, \|\cdot\|)$ — сепарабельний банаховий простір. В такому разі існує така строго опукла норма $\|\cdot\|_0$ на E, що $\|x\| \le \|x\|_0 \le 2\|x\|$ для кожного $x \in E$.*

Доведення. Відомо [5, гл V, §3, теорема 1], що існує ізометричний ізоморфізм $J : E \to P$ сепарабельного банахового простору E на замкнений лінійний підпростір P простору $C_u[0,1]$, норму якого позначимо тут символом $\|\cdot\|_\infty$. Норма $\|g\|_2 = \left(\int\limits_0^1 g^2(y)dy\right)^{\frac{1}{2}}$ на $C[0,1]$ породжена скалярним добутком, а тому строго опукла. Тоді і функція $\|g\|^0 = \|g\|_\infty + \|g\|_2$ є строго опуклою нормою на $C[0,1]$, як і її звуження на P. Тому формула $\|x\|_0 = \|Jx\|^0$ визначає строго опуклу норму на E, причому для кожного $x \in E$ справджуються нерівності $\|x\|_0 = \|Jx\|_\infty + \|Jx\|_2 \ge \|Jx\|_\infty = \|x\|$, $\|x\|_0 = \|Jx\|_\infty + \|Jx\|_2 \le 2\|Jx\|_\infty = 2\|x\|$. □

Відомі і кращі теореми про перенормування (наприклад, теорема Троянського [3, с.128]), але нам досить доведеного результату.

Теорема 4. *Нехай L — скрізь щільний лінійний підпростір сепарабельного нормованого простору E. Тоді існує така послідовність неперервних операторів $A_n : E \to L$, що $A_n x \to x$ в E для кожного $x \in E$.*

Доведення. Оскільки кожна лінійна скрізь щільна множина в лінійному нормованому просторі є такою ж і в поповненні цього простору, то не втрачаючи загальності, вважаємо, що E — сепарабельний банахів простір. Нехай $\|\cdot\|$ — норма в E, а L — лінійна скрізь щільна множина в E.

Нехай, спочатку, норма $\|\cdot\|$ — строго опукла. Оскільки підпростір сепарабельного метричного простору є сепарабельним метричним простором, а відношення скрізь щільності є транзитивним, то існує така послідовність точок $x_n \in L$, що множина $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ скрізь щільна в E. Для кожного номера $n \in \mathbb{N}$ позначимо через L_n лінійну оболонку елементів $x_1, \ldots, x_n$. Тоді для кожного $x \in E$ існує елемент найкращого наближення в L_n, який ми позначимо $A_n x$ (його існування випливає з того, що L_n — скінченновимірний підпростір [4, твердження 1.3.1], а єдиність — з того, що норма в E строго опукла [4, твердження 1.3.3]). Оскільки множина $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ скрізь щільна в E, то $\|x - A_n x\| = \inf\limits_{y \in L_n} \|x - y\| \to 0$ при $n \to \infty$. При цьому оператори A_n неперервні як проекції на скінченновимірний підпростір [4, твердження 1.2.2].

Нехай тепер E — довільний сепарабельний банахів простір. За лемою 4.1 існує така строго опукла норма $\|\cdot\|_0$ на E, яка еквівалентна вихідній нормі $\|\cdot\|$. За доведеним існує така послідовність операторів $A_n : E \to L$, неперервних у банаховому просторі $(E, \|\cdot\|_0)$, що $\|A_n x - x\|_0 \to 0$ при $n \to \infty$ для всіх $x \in E$. Оскільки норми $\|\cdot\|$ і $\|\cdot\|_0$ еквівалентні, то оператори A_n неперервні і в банаховому просторі $(E, \|\cdot\|)$ та $\|A_n x - x\| \to 0$ при $n \to \infty$ для всіх $x \in E$. □

Література

1. Власюк Г.А., Маслюченко В.К. *Многочлени Бернштейна і нарізно неперервні функції* // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Математика. — 2007. — Вип. 336–337. — С. 52–59.
2. Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В. *Про наближення нарізно і сукупно неперервних функцій* // Карпатські математичні публікації — 2010. — Т.2, №2. — С. 11–21.
3. Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств. — К: Вища школа, 1986. — 216 с.
4. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. — М: Наука, 1976. — 320 с.
5. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. — М: Наука, 1965. — 520 с.
6. Маслюченко В.К. Лекції з функціонального аналізу. Ч.1. Метричні і нормовані простори. — Чернівці: Рута, 2010. — 184 с.
7. Маслюченко В.К. Лекції з функціонального аналізу. Ч.2. Лінійні оператори і функціонали. — Чернівці: Рута, 2010. — 192 с.

[1] Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Надійшло 16.12.2011

Maslyuchenko V.K., Nesterenko O.N., Voloshyn H.A. *On approximation of mappings with values in the space of continuous functions*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 23–27.

Using a theorem on the approximation of the identity in the Banach space $C_u(Y)$ of all continuous functions $g : Y \to \mathbb{R}$, defined on a metrizable compact Y with the uniform norm, we prove that for a topological space X, a metrizable compact Y, a linear subspace L of Y dense in $C_u(Y)$ and a separately continuous function $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ there exists a sequence of jointly continuous functions $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$ such that $f_n^x = f(x, \cdot) \in L$ and $f_n^x \to f^x$ in $C_u(Y)$ for each $x \in X$.

Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Нестеренко О.Н. *Об апроксимации отображений со значениями в пространстве непрерывных функций* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 23–27.

С помощью теоремы об апроксимации единичного оператора в банаховом пространстве $C_u(Y)$ всех непрерывных функций $g : Y \to \mathbb{R}$, заданных на метризируемом компакте Y с равномерной нормой, доказано, что для топологического пространства X, метризируемого компакта Y, всюду плотного в $C_u(Y)$ линейного подпространства L и раздельно непрерывной функции $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ существует такая последовательность совокупно непрерывных функций $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, что $f_n^x = f(x, \cdot) \in L$ и $f_n^x \to f^x$ в $C_u(Y)$ для каждого $x \in X$.

Карпатські математичні публікації. Т.4, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №1

УДК 517.53

Глова Т.Я.[1], Філевич П.В.[2]

ЗРОСТАННЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ В ТЕРМІНАХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ПОРЯДКІВ

Глова Т.Я., Філевич П.В. *Зростання цілих функцій в термінах узагальнених порядків* Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — C. 28–35.

Нехай Φ — така опукла на $[x_0, +\infty)$ функція, що $\frac{\Phi(x)}{x} \to +\infty$, $x \to +\infty$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — трансцендентна ціла функція, $M(r, f)$ — максимум модуля f,

$$\rho_{\Phi}(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln\Phi(\ln r)}, \quad c_{\Phi} = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln\Phi(x)}, \quad d_{\Phi} = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln\ln\Phi'_{+}(x)}{\ln\Phi(x)}.$$

Доведено, що умова $d_{\Phi} \le c_{\Phi}$ є необхідною і достатньою для того, щоб узагальнений порядок $\rho_{\Phi}(f)$ кожної трансцендентної цілої функції f не залежав від аргументів коефіцієнтів a_n (чи визначався послідовністю $(|a_n|)$).

Вступ

Нехай $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, L — клас неперервних, зростаючих до $+\infty$ на $[x_0, +\infty)$ функцій, а Ω — клас опуклих на $[x_0, +\infty)$ функцій Φ таких, що

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = +\infty.$$

Через $\mathcal{H}$ позначимо клас трансцендентних цілих функцій. Якщо $f \in \mathcal{H}$ і $n \in \mathbb{N}_0$, то через $a_n(f)$ позначимо n-ний коефіцієнт степеневого розвинення функції f, тобто

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) z^n. \tag{1}$$

Максимум модуля, максимальний член і порядок цієї функції визначаємо відповідно рівностями

$$M(r,f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}, \quad \mu(r,f) = \max\{|a_n(f)|r^n : n \in \mathbb{N}_0\},$$
$$\rho(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r}.$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 30D20, 30B10.
Ключові слова і фрази: ціла функція, максимум модуля, максимальний член, центральний індекс, порядок, узагальнений порядок.

Крім того, покладемо

$$G(r,f) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(f)| r^n.$$

За нерівністю Коші $\mu(r,f) \le M(r,f)$, очевидно також, що $M(r,f) \le G(r,f)$.

Зростання кожної цілої функції $f \in \mathcal{H}$ ототожнюємо зі зростанням її логарифма максимуму модуля $\ln M(r,f)$. Добре відомо, що $\ln M(e^x, f)$, а також $\ln\mu(e^x, f)$ і $\ln G(e^x, f)$ є функціями з класу Ω.

Якщо функцію $f \in \mathcal{H}$ задано степеневим рядом (1), задача про безпосереднє описання зростання цієї функції передбачає знаходження максимуму модуля $M(r,f)$ або встановлення певних оцінок для $M(r,f)$, а тому є доволі нетривіальною. Важливим допоміжним засобом у питаннях такого роду є поняття порядку, а також добре відома (див., наприклад, [2, с. 13]) класична формула Адамара

$$\rho(f) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n\ln n}{\ln\frac{1}{|a_n(f)|}},$$

яка дозволяє описати зростання цілої функції f вигляду (1) через послідовність модулів коефіцієнтів її степеневого розвинення $(|a_n(f)|)$.

Нехай $\mathcal{F}$ — клас відображень $F : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ таких, що $F(f) = F(g)$ для довільних цілих функцій $f, g \in \mathcal{H}$, послідовності модулів коефіцієнтів степеневих розвинень яких співпадають, тобто $|a_n(f)| = |a_n(g)|$ для довільного $n \in \mathbb{N}_0$. Зауважимо, що якщо $F \in \mathcal{F}$ — деяке фіксоване відображення, то для кожної $f \in \mathcal{H}$ вигляду (1) величина $F(f)$ не залежить від аргументів коефіцієнтів $a_n(f)$. Більше того, розглянувши поряд з функцією f функцію g таку, що $a_n(g) = |a_n(f)|$, $n \in \mathbb{N}_0$, бачимо, що функція g, а тому й величина $F(f) = F(g)$ повністю визначається послідовністю $(|a_n(f)|)$. Зазначимо також, що порядок $\rho = \rho(f)$ є прикладом відображення з класу $\mathcal{F}$.

Зрозуміло, що поняття порядку, яке виникло внаслідок порівняння зростання цілої функції зі зростанням степеневих функцій, є дієвим в основному у випадку $\rho(f) \in (0, +\infty)$. У випадках $\rho(f) = 0$ і $\rho(f) = +\infty$ це поняття дає обмежену інформацію щодо зростання цілої функції. Побудові досконаліших шкал зростання цілих функцій, в яких в якості функцій порівняння вибрані відмінні від степеневих чи навіть функції з певних загальних підкласів класу зростаючих функцій, присвячено значну кількість робіт (див. роботи [5]–[7] і бібліографію в них). Характерним в цих дослідженнях було те, що функції порівняння хоч і були досить загальними, але завжди підбирались в такий спосіб, щоб для породженого ними узагальненого порядку можна було встановити аналог формули Адамара, тобто виразити узагальнений порядок кожної цілої функції f вигляду (1) через послідовність модулів коефіцієнтів її степеневого розвинення $(|a_n(f)|)$. Однак, як показують результати робіт [3, 4], зростання цілої функції може істотно залежати не лише від модулів, а й від аргументів коефіцієнтів її степеневого розвинення. Використовуючи ці результати, легко навести приклади функцій порівняння таких, що для відповідних узагальнених порядків формули типу Адамара не існують. У зв'язку з цим виникає загальна задача щодо опису функцій зростання, для яких відповідний узагальнений порядок кожної цілої функції f вигляду (1) можна виразити через послідовність $(|a_n(f)|)$. Частково цю задачу розв'язано у даній роботі.

1 Формулювання результатів

Ми розглянемо доволі загальну шкалу зростання цілих функцій, увівши узагальнений порядок цілої функції $f \in \mathcal{H}$ формулою

$$\rho_\Phi(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln \Phi(\ln r)},$$

де $\Phi \in \Omega$. Така шкала є природною з огляду на те, що для кожної фіксованої $f \in \mathcal{H}$ функція $\ln M(e^x, f)$ належить до класу Ω.

Для довільних функцій $\Phi \in \Omega$ і $f \in \mathcal{H}$ покладемо

$$c_\Phi = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln \Phi(x)}, \quad d_\Phi = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln\ln \Phi'_+(x)}{\ln \Phi(x)},$$

$$\varkappa_\Phi(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln \mu(r,f)}{\ln \Phi(\ln r)} \quad \tau_\Phi(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln G(r,f)}{\ln \Phi(\ln r)}.$$

Тоді, як легко бачити,

$$c_\Phi \le \varkappa_\Phi(f) \le \rho_\Phi(f) \le \tau_\Phi(f). \tag{2}$$

Крім того, $c_\Phi \in [0,1]$, причому для кожного $c \in [0,1]$ можна навести приклад функції $\Phi \in \Omega$ такої, що $c_\Phi = c$. Ясно також, що $\varkappa_\Phi = \varkappa_\Phi(f)$ і $\tau_\Phi = \tau_\Phi(f)$ — відображення з класу $\mathcal{F}$.

Основним результатом нашої роботи є така теорема.

Теорема 1. *Нехай $\Phi \in \Omega$. Тоді наступні твердження рівносильні:*

1) $\rho_\Phi = \rho_\Phi(f)$ — відображення з класу $\mathcal{F}$;

2) для довільної $f \in \mathcal{H}$ правильна рівність $\rho_\Phi(f) = \varkappa_\Phi(f)$;

3) для довільної $f \in \mathcal{H}$ правильна рівність $\rho_\Phi(f) = \tau_\Phi(f)$;

4) $d_\Phi \le c_\Phi$.

Врахувавши другу та третю з нерівностей (2), а також той факт, що $G(r,f) = M(r,g)$ для $f, g \in \mathcal{H}$ таких, що $a_n(g) = |a_n(f)|$, $n \in \mathbb{N}_0$, теорему 1 легко довести, використовуючи наступні результати.

Теорема 2. *Нехай $\Phi \in \Omega$. Якщо $d_\Phi \le c_\Phi$, тоді для довільної цілої функції $f \in \mathcal{H}$ правильна рівність $\tau_\Phi(f) = \varkappa_\Phi(f)$.*

Теорема 3. *Нехай $\Phi \in \Omega$. Якщо $d_\Phi > c_\Phi$, тоді існує ціла функція $f \in \mathcal{H}$ така, що $\tau_\Phi(f) > \rho_\Phi(f)$.*

З наведених теорем можна зробити такі висновки:

1) якщо $d_\Phi \le c_\Phi$, то для кожної цілої функції $f \in \mathcal{H}$ її узагальнений порядок $\rho_\Phi(f)$ можна виразити через послідовність $(|a_n(f)|)$; формами такого вираження є рівності $\rho_\Phi(f) = \varkappa_\Phi(f)$ чи $\rho_\Phi(f) = \tau_\Phi(f)$;

2) якщо $d_\Phi > c_\Phi$, то існують цілі функції $f, g \in \mathcal{H}$ такі, що $|a_n(f)| = |a_n(g)|$, $n \in \mathbb{N}_0$, і $\rho_\Phi(f) \ne \rho_\Phi(g)$, тобто, узагальнений порядок цілої функції не можна виразити лише через послідовність модулів коефіцієнтів її степеневого розвинення.

2 Допоміжні результати

Для функції $f \in \mathcal{H}$ позначимо її центральний індекс через $\nu(r,f) = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : |a_n(f)|r^n = \mu(r,f)\}$. Добре відомо, що $\nu(r,f) = r(\ln\mu(r,f))'_+$ для всіх $r > 0$. Крім того, правильна така лема [8].

Лема A. *Нехай (n_k) — зростаюча послідовність невід'ємних цілих чисел, а (c_k) — зростаюча до $+\infty$ додатна послідовність. Якщо комплексна послідовність (a_n) така, що $a_0 = \dots = a_{n_0-1} = 0$, $a_{n_0} \ne 0$,*

$$|a_{n_{k+1}}| = |a_{n_0}| \prod_{j=0}^{k} c_j^{n_j - n_{j+1}}$$

і $|a_n| \le |a_{n_k}| c_k^{n_k - n}$ для кожного $k \in \mathbb{N}_0$ і всіх $n \in (n_k, n_{k+1})$, то степеневий ряд (1) з коефіцієнтами $a_n(f) = a_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, задає цілу функцію $f \in \mathcal{H}$, для якої:

(i) $\nu(r,f) = n_0$ для $r \in (0, c_0)$;

(ii) $\nu(r,f) = n_{k+1}$ для $r \in [c_k, c_{k+1})$ і $k \in \mathbb{N}_0$.

Наступну лему доведено в [1, с. 46].

Лема B. *Нехай $N \in \mathbb{N}$. Існують числа $e_0(N), \dots, e_{n-1}(N) \in \{-1, 1\}$ такі, що*

$$\max_{\theta\in[0,2\pi]} \left| \sum_{j=0}^{N-1} e_j(N) e^{ij\theta} \right| \le \frac{2}{\sqrt{2}-1}\sqrt{N}.$$

3 Доведення теорем

Доведення теореми 2. Нехай $\Phi \in \Omega$, $f \in \mathcal{H}$ — довільна ціла функція вигляду (1) та виконується умова $d_\Phi \le c_\Phi$. Згідно з (2) досить довести, що $\tau_\Phi(f) \le \varkappa_\Phi(f)$. Якщо $\varkappa_\Phi(f) = +\infty$ доведення тривіальне. Нехай $\varkappa_\Phi(f) < +\infty$ і $\varkappa$ — довільне число таке, що $\varkappa > \varkappa_\Phi(f)$. З означення величини $\varkappa_\Phi(f)$, умови $d_\Phi \le c_\Phi$ і першої з нерівностей (2) для всіх $r \ge r_1$ отримуємо

$$\ln\mu(r,f) \le \Phi^\varkappa(\ln r), \quad \ln\Phi'_+(\ln r) \le \Phi^\varkappa(\ln r). \tag{3}$$

Якщо $0 \le r < R$, тоді

$$G(r,f) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n \left(\frac{r}{R}\right)^n \le \mu(R,f) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n = \mu(R,f)\frac{R}{R-r}. \tag{4}$$

Оскільки $\Phi \in \Omega$, то Φ'_+ є неспадною, необмеженою на $[x_0, +\infty)$ функцією, а тому для кожного $r \ge r_2$ маємо $\Phi'_+(\ln r) \ge 1$ та існує

$$R(r) = \sup\left\{R > r : \Phi'_+(\ln R) \le \frac{r}{R-r}\right\}.$$

Зауважимо, що тоді

$$1 \le \Phi'_-(\ln R(r)) \le \frac{r}{R(r)-r} \le \Phi'_+(\ln R(r)),$$

звідки, отримуємо нерівність $R(r) \le 2r$. Оскільки $\ln x < x-1$ для всіх $x>1$, то

$$\Phi(\ln R(r)) - \Phi(\ln r) = \int_{\ln r}^{\ln R(r)} \Phi'_-(x)dx \le \Phi'_-(\ln R(r)) \ln \frac{R(r)}{r} < \frac{r}{R(r)-r}\frac{R(r)-r}{r} = 1.$$

Тому, використовуючи нерівності (4) і (3), для всіх $r \ge r_3$ отримуємо

$$\ln G(r,f) \le \ln \mu(R(r),f) + \ln \frac{2r}{R(r)-r}$$
$$\le \Phi^{\varkappa}(\ln R(r)) + \ln \Phi'_+(\ln R(r)) + \ln 2 \le 3(1+\Phi(\ln r))^{\varkappa}.$$

Звідси маємо

$$\tau_\Phi(f) \le \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln 3 + \varkappa \ln(1+\Phi(\ln r))}{\ln \Phi(\ln r)} = \varkappa.$$

З довільності $\varkappa > \varkappa_\Phi(f)$ випливає, що $\tau_\Phi(f) \le \varkappa_\Phi(f)$. Теорему доведено. □

Доведення теореми 3. Нехай для функції $\Phi \in \Omega$ виконується умова $d_\Phi > c_\Phi$. Доведемо, що існує ціла функція $f \in \mathcal{H}$ така, що $\tau_\Phi(f) > \rho_\Phi(f)$.

Нехай $\delta \in (c_\Phi, d_\Phi)$, а (δ_n) — спадна до 0 фіксована послідовність. Виберемо зростаючу до $+\infty$ послідовність (x_k) так, щоб виконувались наступні умови:

$$\Phi'_+(x_0) > 1; \tag{5}$$
$$x_{k+1} \ge x_k + 1, \quad k \in \mathbb{N}_0; \tag{6}$$
$$\ln \delta_k = o(\ln \Phi(x_k)), \quad k \to +\infty; \tag{7}$$
$$(\Phi'_+(x_{k+1}))^{\delta_{k+1}} \ge 2(\Phi'_+(x_k))^{\delta_k} + 1, \quad k \in \mathbb{N}_0; \tag{8}$$
$$(\Phi'_+(x_k))^{\delta_k} < \ln x_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}_0; \tag{9}$$
$$\ln\ln \Phi'_+(x_k) \ge \delta \ln \Phi(x_k), \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{10}$$

Для всіх $x \in [x_k, x_{k+1})$ і кожного $k \in \mathbb{N}_0$ покладемо $\psi(x) = (\Phi'_+(x_k))^{\delta_k}$. Нехай

$$\Psi(x) = \int_{x_0}^{x} \psi(t)dt, \quad x \ge x_0,$$

тоді для всіх $x \in [x_k, x_{k+1})$ і $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\Phi(x) \ge \Phi(x) - \Phi(x_k) = \int_{x_k}^{x} \Phi'_+(t)dt \ge \Phi'_+(x_k)(x-x_k),$$

а тому, використовуючи умову (9), отримуємо

$$\Psi(x) = \int_{x_0}^{x_k} \psi(t)dt + \int_{x_k}^{x} \psi(t)dt \le \int_{x_0}^{x_k} (\Phi'_+(x_{k-1}))^{\delta_{k-1}}dt + \int_{x_k}^{x} (\Phi'_+(x_k))^{\delta_k}dt$$
$$\le (x_k - x_0)(\Phi'_+(x_{k-1}))^{\delta_{k-1}} + (x-x_k)(\Phi'_+(x_k))^{\delta_k} \le x_k \ln x_k + (x-x_k)(\Phi'_+(x_k))^{\delta_k}$$
$$= x_k \ln x_k + (x-x_k)^{1-\delta_k}((x-x_k)\Phi'_+(x_k))^{\delta_k} \le x\ln x + x^{1-\delta_k}\Phi^{\delta_k}(x) \le x(\ln x + \Phi^{\delta_k}(x)).$$

Звідси випливає, що

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln \Psi(x)}{\ln \Phi(x)} = c_\Phi. \tag{11}$$

Нехай $n_0 = 0$, $n_{k+1} = [\psi(x_k)]$ і $c_k = e^{x_k}$ для всіх $k \in \mathbb{N}_0$. Тоді $n_1 \ge 1$ за умовою (5), $c_{k+1} \ge ec_k$ і $n_{k+1} \ge 2n_k$ для всіх $k \in \mathbb{N}_0$ за умовами (6) і (8) відповідно.

Покладемо $b_0 = b_{n_0} = 1$, $b_{n_{k+1}} = \prod_{j=0}^{k} c_j^{n_j - n_{j+1}}$ для всіх $k \in \mathbb{N}_0$, якщо $n \in (n_k, n_{k+1})$ і $k \in \mathbb{N}_0$, тоді $b_n = b_{n_k} c_k^{n_k - n}$. Розглянемо степеневий ряд $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. За лемою А цей ряд задає цілу функцію $g \in \mathcal{H}$ таку, що $\nu(r,g) = n_{k+1} = [\psi(\ln c_k)] = [\psi(\ln r)]$ для всіх $r \in [c_k, c_{k+1})$ і $k \in \mathbb{N}_0$. Отже, $\nu(r,g) = [\psi(\ln r)]$, $r \ge c_0$, а тому $\nu(r,g) \sim \psi(\ln r)$, $r \to +\infty$. За правилом Лопіталя отримаємо $\ln \mu(r,g) \sim \Psi(\ln r)$, $r \to +\infty$. Звідси і з (11) отримуємо, що $\varkappa_\Phi(g) = c_\Phi$.

З умов (7) і (10) випливає, що

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln\ln n_{k+1}}{\ln \Phi(\ln c_k)} = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln\ln \psi(x_k)}{\ln \Phi(x_k)} = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln\ln (\Phi'_+(x_k))^{\delta_k}}{\ln \Phi(x_k)} \ge \delta > c_\Phi. \tag{12}$$

Для $r>0$ і $k \in \mathbb{N}$ матимемо

$$A_k(r) = \sum_{n=0}^{n_k - 1} b_n r^n, \quad B_k(r) = \sum_{n=n_k}^{\infty} b_n r^n.$$

Оцінимо зверху $A_k(c_k)$ і $B_{k+1}(c_k)$, для цього скористаємось рівністю

$$\mu(c_k, g) = \mu(c_k - 0, g) = b_{n_k} c_k^{n_k}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

яка випливає з неперервності функції $\mu(r,g)$, $r>0$.

Нехай, $k \in \mathbb{N}$ і $n \in [0, n_k - 1]$, тоді $n \in [n_m, n_{m+1})$ для деякого $m \le k-1$, а тому

$$b_n c_k^n = b_{n_m} c_m^{n_m - n} c_k^n = b_{n_k} \prod_{j=m}^{k-1} c_j^{n_{j+1}-n_j} c_m^{n_m - n} c_k^n \le b_{n_k} \prod_{j=m}^{k-1} c_{k-1}^{n_{j+1}-n_j} c_{k-1}^{n_m - n} c_k^n$$
$$= b_{n_k} c_{k-1}^{n_k - n} c_k^n = \mu(c_k, g) \left(\frac{c_{k-1}}{c_k}\right)^{n_k - n} \le \mu(c_k, g) \frac{1}{e^{n_k - n}}.$$

Звідси отримуємо

$$A_k(c_k) = \sum_{n=0}^{n_k - 1} b_n c_k^n < \mu(c_k, g) \sum_{n=0}^{n_k - 1} \frac{1}{2^{n_k - n}} < \mu(c_k, g), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Нехай $k \in \mathbb{N}_0$ і $n \ge n_{k+1}$, $n \in [n_m, n_{m+1})$ для деякого $m \ge k+1$, тоді

$$b_n c_k^n = b_{n_m} c_m^{n_m - n} c_k^n = b_{n_k} \prod_{j=k}^{m-1} c_j^{n_j - n_{j+1}} c_m^{n_m - n} c_k^n \le b_{n_k} c_k^{n_k - n_{k+1}} c_{k+1}^{n_{k+1} - n} c_k^n$$
$$= b_{n_k} c_k^{n_k - n_{k+1} + n} c_{k+1}^{n_{k+1} - n} = \mu(c_k, g) \left(\frac{c_k}{c_{k+1}}\right)^{n - n_{k+1}} \le \mu(c_k, g) \frac{1}{e^{n - n_{k+1}}}.$$

Звідси отримуємо

$$B_{k+1}(c_k) = \sum_{n=n_{k+1}}^{\infty} b_n c_k^n < \mu(c_k, g) \sum_{n=n_{k+1}}^{\infty} \frac{1}{2^{n-n_{k+1}}} = 2\mu(c_k, g), \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{14}$$

Покладемо $N_k = n_{k+1} - n_k$ для кожного $k \in \mathbb{N}_0$ і розглянемо степеневий ряд (1), коефіцієнти якого $a_n(f) = a_n$ визначено наступним чином

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{N_k}} b_n e_{n-n_k}(N_k), \quad n \in [n_k, n_{k+1}), \ k \in \mathbb{N}_0,$$

де $e_0(N_k), \ldots, e_{N_k-1}(N_k) \in \{-1, 1\}$ — числа, існування яких стверджується лемою B при $N = N_k$. Тоді $|a_n| \leq b_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$, а тому ряд (1) задає цілу функцію $f \in \mathcal{H}$.

Зрозуміло, що для цієї функції

$$G(c_k, f) \geq \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} a_n c_k^n = \frac{1}{\sqrt{N_k}} \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} b_{n_k} c_k^{n_k-n} c_k^n = \mu(c_k, g)\sqrt{N_k} \geq \sqrt{N_k} \geq \sqrt{\frac{n_{k+1}}{2}}$$

для кожного $k \in \mathbb{N}_0$. Тому, скориставшись оцінкою (12), отримуємо

$$\tau_\Phi(f) \geq \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\ln\ln G(c_k, g)}{\ln\Phi(\ln c_k)} \geq \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\ln\ln n_{k+1}}{\ln\Phi(\ln c_k)} \geq \delta > c_\Phi. \tag{15}$$

З іншого боку, використовуючи (13), (14) і лему B, для кожного $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$\begin{aligned} M(c_k, f) &\leq \sum_{n=0}^{n_k-1} |a_n| c_k^n + \max_{\theta\in[0,2\pi]} \left| \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} a_n c_k^n e^{in\theta} \right| + \sum_{n=n_{k+1}}^{\infty} |a_n| c_k^n \\ &\leq A_k(c_k) + \frac{1}{\sqrt{N_k}} \max_{\theta\in[0,2\pi]} \left| \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} b_{n_k} c_k^{n_k-n} e_{n-n_k}(N_k) c_k^n e^{in\theta} \right| + B_{k+1}(c_k) \\ &\leq \mu(c_k, g) + \frac{1}{\sqrt{N_k}} \mu(c_k, g) \max_{\theta\in[0,2\pi]} \left| \sum_{j=0}^{N_k-1} e_j(N_k) e^{ij\theta} \right| + 2\mu(c_k, g) \\ &\leq 3\mu(c_k, g) + \frac{1}{\sqrt{N_k}} \mu(c_k, g) \frac{2}{\sqrt{2}-1} \sqrt{N_k} < 8\mu(c_k, g). \end{aligned}$$

Отже, $\ln M(c_k, f) < 3 + \ln\mu(c_k, g)$, $k \in \mathbb{N}$. Оскільки на відрізку $[c_k, c_{k+1}]$, $k \in \mathbb{N}$, функція $\ln M(r, f)$ є опуклою, а функція $\ln\mu(r, g)$ — лінійною відносно $\ln r$, то на цьому відрізку функція $h(r) = \ln M(r, f) - \ln\mu(r, g)$ досягає свого максимуму в одній з точок c_k чи c_{k+1}. Тому $\ln M(r, f) \leq 3 + \ln\mu(r, g)$ для всіх $r \geq c_1$. Тоді

$$\rho_\Phi(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M(r, f)}{\ln\Phi(\ln r)} \leq \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln\mu(r, g)}{\ln\Phi(\ln r)} = c_\Phi.$$

Використовуючи дану нерівність та оцінку (15), отримаємо, що $\tau_\Phi(f) > \rho_\Phi(f)$. □

Література

1. Кахан Ж.-П. Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. — М.: Мир, 1976. — 204 с.
2. Левин Б.Я. Распределение корней целых функции. — М.: ГИТТЛ, 1956. — 632 с.
3. Филевич П.В. *Неравенства типа Вимана-Валирона для целых и случайных целых функций конечного логарифмического порядка* // Сиб. мат. журн. — 2001. — Т.42, №3. — С. 683–692.
4. Филевич П.В. *О влиянии аргументов коэффициентов степенного разложения целой функции на рост ее максимума модуля* // Сиб. мат. журн. — 2003. — Т.44, №3. — С. 674–685.
5. Шеремета М.Н. *О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения* // Изв. вузов. Мат. — 1967. — Т.57, №2. — С. 100–108.
6. Шеремета М.Н. *О связи между ростом целых или аналитических в круге функций нулевого порядка и коэффициентами их степенных разложений* // Изв. вузов. Мат. — 1968. — Т.73, №6. — С. 115–121.
7. Шеремета М.М. Цілі ряди Діріхле. — К.: ІСДО, 1993. — 168 с.
8. Filevych P. *On the slow growth of power series convergent in the unit disk*. Mat. Stud., **16**, 2 (2001), 217–221.

[1] Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна

e-mail: *hlova_taras@ukr.net*

[2] Львівський національний університет ветеринарної медицини та біотехнологій ім. С.З. Гжицького, Львів, Україна

e-mail: *filevych@mail.ru*

Надійшло 26.03.2012

Hlova T.Ya., Filevych P.V. *The growth of entire functions in the terms of generalized orders*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 28–35.

Let Φ be a convex function on $[x_0, +\infty)$ such that $\frac{\Phi(x)}{x} \to +\infty$, $x \to +\infty$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — a transcendental entire function, let $M(r, f)$ be the maximum modulus of f and let

$$\rho_\Phi(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M(r, f)}{\ln\Phi(\ln r)}, \quad c_\Phi = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln\Phi(x)}, \quad d_\Phi = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln\ln\Phi'_+(x)}{\ln\Phi(x)}.$$

It is proved that for every transcendental entire function f the generalized order $\rho_\Phi(f)$ is independent on the arguments of the coefficients a_n (or defined by the sequence $(|a_n|)$) if and only if the inequality $d_\Phi \leq c_\Phi$ holds.

Глова Т.Я., Филевич П.В. *Рост целых функций в терминах обобщенных порядков* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 28–35.

Пусть Φ — такая выпуклая на $[x_0, +\infty)$ функция, что $\frac{\Phi(x)}{x} \to +\infty$, $x \to +\infty$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — трансцендентная целая функция, $M(r, f)$ — максимум модуля f,

$$\rho_\Phi(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M(r, f)}{\ln\Phi(\ln r)}, \quad c_\Phi = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln\Phi(x)}, \quad d_\Phi = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln\ln\Phi'_+(x)}{\ln\Phi(x)}.$$

Доказано, что условие $d_\Phi \leq c_\Phi$ является необходимым и достаточным для того, чтобы обобщенный порядок $\rho_\Phi(f)$ каждой трансцендентной целой функции f не зависел от аргументов коэффициентов a_n (или определялся последовательностью $(|a_n|)$).

Карпатські математичні публікації. Т.4, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №1

УДК 512.538

Довбняк Т.С., Заторський Р.А.

ПАРАФУНКЦІЇ МАТРИЦЬ ВЕРТИКАЛЬНОЇ ТА ГОРИЗОНТАЛЬНОЇ СТРУКТУРИ

Довбняк Т.С., Заторський Р.А. *Парафункції матриць вертикальної та горизонтальної структури* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — С. 36–42.

Досліджуються властивості парафункцій матриць вертикальної та горизонтальної структури та будуються деякі загальні формули обернення поліноміальних послідовностей.

1 Вступ

Парафункції трикутних матриць [4] спеціальної структури відіграють важливу роль у комбінаторному аналізі та теорії чисел. Одним із таких важливих класів трикутних матриць є трикутні матриці похилої структури досліджені у [3].

У статті досліджуються деякі властивості парафункцій трикутних матриць вертикальної $V = (v_{0\cdot i+j})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$ та горизонтальної $H = (h_{i+0\cdot j})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$ структури, зокрема, для них будуються загальні формули обернення [1].

2 Допоміжні поняття та твердження

Матриця виду

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_n , \tag{1}$$

з елементами із деякого числового поля, називається трикутною матрицею.

Роль одиничної матриці відіграє матриця виду

$$I = (\delta_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n},$$

де δ_{ij} — символ Кронекера.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30.

Ключові слова і фрази: трикутна матриця, парафункції, матриця горизонтальної структури, матриця вертикальної структури.

Означення 1. [4]. *Нехай A — трикутна матриця (1). Парадетермінантом та параперманентом трикутної матриці A називають відповідно числа:*

$$\operatorname{ddet}(A) = \left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle = \sum_{r=1}^{n} \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} (-1)^{n-r} \prod_{s=1}^{r} \{a_{p_1+\ldots+p_s,\, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\},$$

$$\operatorname{pper}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} \prod_{s=1}^{r} \{a_{p_1+\ldots+p_s,\, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\},$$

де підсумовування проводиться за множиною натуральних розв'язків рівняння $p_1 + p_2 + \ldots + p_r = n$, а символом $\{a_{i,j}\}$ позначено факторіальний добуток елемента $a_{i,j}$, що задається рівністю

$$\{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^{i} a_{ik}.$$

Теорема 1. [2]. *Оберненою трикутною матрицею A^{-1} до трикутної матриці (1) є матриця*

$$(b_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = \left(\frac{(-1)^{i+j}}{a_{jj}} \left\langle \frac{a_{r+j+1,s+j}}{a_{r+j+1,s+j+1}} \right\rangle_{1\leqslant s\leqslant r\leqslant i-j-1} \right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}.$$

Нехай $\mathcal{P}_n$ — лінійний простір векторів многочленів і $f = (f_1, \ldots, f_n)$ — деякий його елемент, причому $\deg(f_i) = i-1,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Якщо

$$Af = g, \tag{2}$$

то трикутну матрицю (1) можна інтерпретувати як лінійний оператор A, який переводить вектор многочленів f у вектор многочленів g. Із останньої рівності отримаємо рівність

$$f = A^{-1}g, \tag{3}$$

де $A^{-1} = (b_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$.

Із рівностей (2), (3) випливають відповідно формули обернення поліноміальних послідовностей g і f:

$$g_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni} f_i, \qquad f_n = \sum_{i=1}^{n} b_{ni} g_i.$$

3 Формули обернення поліноміальних послідовностей

Побудуємо дві пари загальних формул обернення поліноміальних послідовностей, породжених трикутними матрицями вертикальної та горизонтальної структури. Справедлива наступна

Теорема 2. *Нехай* $V = (v_{0\cdot i+j})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$ *і* $H = (h_{i+0\cdot j})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$ *деякі трикутні матриці вертикальної та горизонтальної структури з елементами із деякого числового поля і f та g — деякі вектори многочленів, тоді справедливі формули обернення для відповідних поліноміальних послідовностей:*

$$g_n = \sum_{i=1}^{n} v_i f_i, \qquad f_n = \frac{1}{v_n}(g_n - g_{n-1}), \qquad n = 1, 2, \ldots; \tag{4}$$

та

$$g_n = h_n \sum_{i=1}^{n} f_i, \qquad f_n = \frac{1}{h_n} g_n - \frac{1}{h_{n-1}} g_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Доведення. Оберненими матрицями до матриць V та H є відповідно матриці:

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v_1} & & & & & \\ -\frac{1}{v_2} & \frac{1}{v_2} & & & & \\ 0 & -\frac{1}{v_3} & \frac{1}{v_3} & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{v_{n-1}} & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\frac{1}{v_n} & \frac{1}{v_n} \end{pmatrix}, H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} & & & & & \\ -\frac{1}{h_1} & \frac{1}{h_2} & & & & \\ 0 & -\frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_3} & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{h_{n-1}} & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\frac{1}{h_{n-1}} & \frac{1}{h_n} \end{pmatrix}.$$

Перемножуючи останні рядки цих матриць на вектор многочленів g отримаємо відповідно рівності (4) та (5). □

4 Парафункції матриць вертикальної та горизонтальної структури

Теорема 3. *Нехай V — матриця вертикальної структури із теореми 2, тоді справедливі рівності:*

$$ddet(V) = 0, \; pper(V) = 2^{n-1} \prod_{i=1}^{n} v_i.$$

Доведення. Виносимо за знак парафункції спільний множник v_i із i-го стовпця та використовуємо той факт, що парадетермінант трикутної матриці з одиничними елементами дорівнює нулю, а параперманент цієї матриці дорівнює 2^{n-1}. □

Теорема 4. *Нехай*

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & & & & \\ h_2 & h_2 & & & \\ h_3 & h_3 & h_3 & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ h_n & h_n & h_n & \ldots & h_n \end{pmatrix} \tag{6}$$

деяка трикутна матриця із елементами числового поля K, тоді виконуються рівності

$$\text{ddet}H = H(h_1, h_2, \ldots, h_{n-2}, h_{n-1}, h_n)_n$$
$$= h_n \cdot (H(h_1, h_2, \ldots, h_{n-2}, h_{n-1})_{n-1} - H(h_1, h_2, \ldots, h_{n-2}, h_n)_{n-1}), \tag{7}$$

$$\text{pper}H = H^{+}(h_1, h_2, \ldots, h_{n-2}, h_{n-1}, h_n)_n$$
$$= h_n \cdot (H^{+}(h_1, h_2, \ldots, h_{n-2}, h_{n-1})_{n-1} + H^{+}(h_1, h_2, \ldots, h_{n-2}, h_n)_{n-1}), \tag{8}$$

Доведення. Розкладемо парадетермінант матриці (6) за елементами останнього рядка

$$H(h_1, h_2, \ldots, h_n) = h_n \cdot H(h_1, h_2, \ldots, h_{n-2}, h_{n-1})$$
$$-h_n \cdot (h_n H(h_1, h_2, \ldots, h_{n-2}) - h_n^2 H(h_1, h_2, \ldots, h_{n-3}) + h_n^3 H(h_1, h_2, \ldots, h_{n-4})$$
$$- \ldots + (-1)^{n-3} h_n^{n-2} H(h_1) + (-1)^{n-2} h_n^{n-1}).$$

Але вираз у дужках правої частини останньої рівності є розкладом парадетермінанта

$$H(h_1, h_2, \ldots, h_{n-2}, h_n) = \left\langle \begin{matrix} h_1 & & & & \\ h_2 & h_2 & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & \\ h_{n-2} & h_{n-2} & \ldots & h_{n-2} & \\ h_n & h_n & \ldots & h_n & h_n \end{matrix} \right\rangle$$

за елементами останнього рядка. Рівність (8) доводиться аналогічно. □

Наслідок 1. *Якщо* $h_{n-1} = h_n$, *то*

$$H(h_1, h_2, \ldots, h_{n-2}, h_{n-1}, h_{n-1})_n = 0,$$

$$H^{+}(h_1, h_2, \ldots, h_{n-2}, h_{n-1}, h_{n-1})_n = 2 \cdot h_{n-1} \cdot H^{+}(h_1, h_2, \ldots, h_{n-2}, h_{n-1})_{n-1}. \tag{9}$$

Доведення. Справедливість рівностей цього наслідку безпосередньо випливає із рекурентних рівностей (7), (8). □

Застосовуючи послідовно (9) до параперманента матриці (6), отримаємо

Наслідок 2. *Якщо* $h_1 = \ldots = h_n = h$, *то* $H^{+}(h_1, h_1, \ldots, h_1)_n = 2^{n-1} \cdot h^n$.

Теорема 5. *Якщо у матриці (6) елементи утворюють геометричну прогресію і виконуються рівності* $h_2 = h_1 q, h_3 = h_1 q^2, \ldots, h_n = h_1 q^{n-1}$, *де* $h_1, q \in \mathbb{R}$, *то парафункції матриць горизонтальної структури виражаються через відповідні парафункції матриць похилої структури*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ q & 1 & & & \\ q^2 & q & 1 & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ q^{n-1} & q^{n-2} & q^{n-3} & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

причому справедливі рівності

$$H(h_1, h_1 q, \ldots. h_1 q^{n-1})_n = h_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} ddetQ$$

$$= h_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n} (-1)^{n-k} \frac{k!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} q^{\lambda_2 + 3\lambda_3 + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}\lambda_n},$$

$$H^+(h_1, h_1 q, \ldots h_1^n q^{n-1})_n = h_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} pperQ$$

$$= h_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n} \frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} q^{\lambda_2+3\lambda_3+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n}, \tag{11}$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

Доведення. Винесемо з i-того стовпця парадетермінанта

$$\left\langle \begin{array}{ccccc} h_1 & & & & \\ h_1 q & h_1 q & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & \\ h_1 q^{n-2} & h_1 q^{n-2} & \ldots & h_1 q^{n-2} & \\ h_1 q^{n-1} & h_1 q^{n-1} & \ldots & h_1 q^{n-1} & h_1 q^{n-1} \end{array} \right\rangle$$

множник $h_1 q^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, за його знак, тоді отримаємо парадетермінант (10) матриці похилої структури, який при допомозі твердження 2.5.2. (див. [4, с. 141]) можна подати у вигляді

$$h_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n} (-1)^{n-k} \frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} q^{\lambda_2+3\lambda_3+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n}.$$

Рівність (11) доводиться аналогічно. □

Теорема 6. *Нехай $h_i, i = 1, 2, \ldots, n-1$ належать деякому числовому полю K і*

$$P(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}; x) = \begin{pmatrix} x & & & & & \\ h_1 & x & & & & \\ h_2 & h_2 & x & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ h_{n-2} & h_{n-2} & \ldots & h_{n-2} & x & \\ h_{n-1} & h_{n-1} & \ldots & h_{n-1} & h_{n-1} & x \end{pmatrix}, \tag{12}$$

причому справедливі рівності:

$$\mathrm{ddet}(P(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}; x))$$

$$= p_{n,0}x^n - p_{n,1}x^{n-1} + p_{n,2}x^{n-2} - \ldots + (-1)^i p_{n,i}x^{n-i} + \ldots + (-1)^{n-1} p_{n,n-1}x,$$

$$\mathrm{pper}(P(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}; x))$$

$$= p_{n,0}x^n + p_{n,1}x^{n-1} + p_{n,2}x^{n-2} + \ldots + p_{n,i}x^{n-i} + \ldots + p_{n,n-1}x,$$

тоді коефіцієнти многочленів задовольняють рекурентні рівності

$$p_{n,i} = p_{n-1,i} + h_{n-1}p_{n-2,i-1} + h_{n-1}^2 p_{n-3,i-2} + \ldots + h_{n-1}^{n-2} p_{1,i-n+2} + h_{n-1}^{n-1} p_{0,i-n+1}, \tag{13}$$

де $n = 0, 1, \ldots; i = 0, 1, \ldots, n-1$, $p_{n,0} = 1, p_{n,<0} = 0$.

Доведення. Розкладаючи парадетермінант із теореми за елементами останнього рядка, дістанемо рівності

$$p_{n,0}x^n - p_{n,1}x^{n-1} + p_{n,2}x^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}p_{n,n-1}x$$

$$= x(p_{n-1,0}x^{n-1} - p_{n-1,1}x^{n-2} + p_{n-1,2}x^{n-3} - \ldots + (-1)^{n-2}p_{n-1,n-2}x)$$

$$-h_{n-1}x(p_{n-2,0}x^{n-2} - p_{n-2,1}x^{n-3} + p_{n-2,2}x^{n-4} - \ldots + (-1)^{n-3}p_{n-2,n-3}x)$$

$$+h_{n-1}^2 x(p_{n-3,0}x^{n-3} - p_{n-3,1}x^{n-4} + p_{n-3,2}x^{n-5} - \ldots + (-1)^{n-4}p_{n-3,n-4}x) - \ldots$$

$$+(-1)^{n-2}h_{n-1}^{n-2}xp_{1,0}x + (-1)^{n-1}h_{n-1}^{n-1}xp_{0,0}x^0,$$

з яких після зрівнювання коефіцієнтів при однакових степенях x дістанемо рекурентні рівності (13). Для парапермарентів співвідношення (13) доводяться аналогічно. □

Запишемо кілька перших многочленів $\mathrm{ddet}(P(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}; x))$:

$$\mathrm{ddet}(P(;x)) = x,$$

$$\mathrm{ddet}(P(h_1;x)) = x^2 - h_1 x,$$

$$\mathrm{ddet}(P(h_1, h_2; x)) = x^3 - (h_1 + h_2)x^2 + h_2^2 x,$$

$$\mathrm{ddet}(P(h_1, h_2, h_3; x)) = x^4 - (h_1 + h_2 + h_3)x^3 + (h_2^2 + h_1 h_3 + h_3^2)x^2 - h_3^3 x,$$

$$\mathrm{ddet}(P(h_1, h_2, h_3, h_4; x)) =$$

$$= x^5 - (h_1+h_2+h_3+h_4)x^4 + (h_2^2+h_1h_3+h_3^2+h_1h_4+h_2h_4+h_4^2)x^3 - (h_3^3+h_4h_2^2+h_4^2h_1+h_4^3)x^2 + h_4^4 x,$$

Наслідок 3. *Якщо у матриці (12) $h_i = 1$, то многочлен $P(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}; x)$ запишеться у вигляді бінома, а співвідношення (13) у вигляді співвідношень*

$$\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-2}{i-1} + \ldots + \binom{n-i-1}{0}, i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Якщо, наприклад, $h_i = i$, то коефіцієнти многочлена $P(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}; x)$ при $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ утворюють числовий трикутник

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ 1 & -1 & & & & & \\ 1 & -3 & 4 & & & & \\ 1 & -6 & 16 & -27 & & & \\ 1 & -10 & 44 & -123 & 256 & & \\ 1 & -15 & 99 & -403 & 1241 & 3125 & \\ 1 & -21 & 195 & -1099 & 4499 & -15569 & 46656 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

відсутній у відомій "On-Line Encyclopedia of Integer Sequences".

Якщо у матриці (14) зробити підстановку $a_i = -i$, то отримаємо многочлени, коефіцієнти яких утворюють числовий трикутник (14) із додатними елементами, що узгоджується із теоремою [4] про зв'язок парадетермінанта трикутної матриці із параперманентом відповідної трикутної матриці.

Література

1. Айгнер М. Комбинаторная теория. — М.: Мир, 1982. — 558 с.
2. Заторский Р.А., Малярчук А.Р. *Треугольные матрицы и комбинаторные формулы обращения* // Матем. заметки. — 2009. — Т.85, Вып. 1. — С. 12–21.
3. Заторський Р.А. *Парафункції матриць похилої структури та многочлени розбиттів* // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика. — 2011. — Т.1, №4. — С. 59–66.
4. Заторський Р.А. Числення трикутних матриць та його застосування. — Івано-Франківськ: Сімик, 2010. — 508 с.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

Надійшло 10.04.2012

Dovbniak T.S., Zatorsky R.A. *Parafunctions of matrices of vertical and horizontal structure.* Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 36–42.

The properties of parafunctions of matrices of vertical and horizontal structure are investigated. Some general formulas of inversion of polynomial sequences are built.

Довбняк Т.С., Заторский Р.А. *Парафункции матриц вертикальной и горизонтальной структуры* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 36–42.

Исследуются свойства парафункций матриц вертикальной и горизонтальной структуры и строятся некоторые общие формулы обращения полиномиальных последовательностей.

Карпатські математичні публікації. Т.4, №1 Carpathian Mathematical Publications. V.4, №1

УДК 517.53

Заболоцький М.В., Костюк О.В.

ПОВІЛЬНЕ ЗРОСТАННЯ ІНТЕГРАЛІВ СТІЛЬТЬЄСА ВІД МОНОТОННИХ ФУНКЦІЙ

Заболоцький М.В., Костюк О.В. *Повільне зростання інтегралів Стільтьєса від монотонних функцій* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — С. 43–48.

Знайдено необхідні та достатні умови на монотонні функції ψ і l, за яких інтеграл Стільтьєса $L(x) = \int_1^x \psi(t)dl(t)$ є повільно зростаючою функцією. Отримані результати застосовано для дослідження розподілу значень та зростання неванліннових характеристик мероморфних в $\mathbb{C}$ функцій.

Вступ

Неперервна (вимірна), зростаюча на $[1,+\infty)$ функція φ називається повільно зростаючою (пов. зр.), якщо $\varphi(2x) \sim \varphi(x)$ при $x \to +\infty$. В теорії розподілу значень цілих та мероморфних функцій характеристики зростання часто виражаються за допомогою інтегралів Стільтьєса. Зокрема, якщо f, g — мероморфні відповідно в $\mathbb{C}$ та півплощині $\{z : Imz \geq 0\}$ функції ($f(0) \neq \infty$, $g(0) \neq \infty$), $n(r,f)$, $\tilde{n}(r,g)$ — кількість полюсів цих функцій в крузі $\{z : |z| \leq r\}$ та в множині $\left\{z : \left|z - i\frac{r}{2}\right| \leq \frac{r}{2}, |z| > 1\right\}$, $\rho(f(z)) = |f'(z)|/(1+|f(z)|^2)$ — сферична похідна f, $c(r,g) = \sum\limits_{1<\rho_n\leq r} \sin\psi_n$, $\rho_n e^{i\psi_n}$ — полюси g, то характеристики Неванлінни та Цудзі функції g дорівнюють

$$C(r,g) = 2\int_1^r \Big(\frac{1}{t} - \frac{t}{r^2}\Big)dc(r,g), \quad \widetilde{R}(r,g) = \int_1^r \Big(\frac{1}{t} - \frac{1}{r}\Big)d\tilde{n}(r,g) = \int_1^r \tilde{n}(r,g)d\Big(1 - \frac{1}{t}\Big),$$

а лічильна функція Неванлінни та сферична характеристика Сімідзу-Альфорса функції f визначаються так $(n(1,f) = 0)$

$$N(r,f) = \int_1^r \ln\frac{r}{t}dn(t,f) = \int_1^r n(t,f)d\ln t, \quad \overset{\circ}{T}(r,f) = \int_1^r \overset{\circ}{A}(t,f)d\ln t,$$

де $\overset{\circ}{A}(r,f) = \frac{1}{\pi}\iint_{|z|\leq r}\rho^2(f(z))dxdy$ (див., наприклад, [2, с. 38-42]).

2010 *Mathematics Subject Classification:* 30E99.
Ключові слова і фрази: повільно зростаюча функція, інтеграл Стільтьєса.

Функції, неванліннові характеристики яких є пов. зр., мають цікаві та специфічні властивості (вкажемо тут тільки на статті [1], [4]–[8]). Зокрема, правильні такі твердження.

Теорема A ([6]). Якщо f — ціла трансцендентна функція і її неванліннова характеристика $T(r,f)$ — пов. зр., то f не має скінченних валіронових виняткових значень.

Теорема B ([5]). Якщо неванліннова характеристика $T(r,f)$ мероморфної в $\mathbb{C}$ функції f є пов. зр. і ∞ є її неванлінновим винятковим значенням, то за асимптотичну криву, на якій $f(z)\to\infty$, можна брати для майже всіх $\theta\in[0,2\pi]$ промінь $\{z:\arg z=\theta\}$.

Тому є природною задача відшукання умов, за яких інтеграл Стільтьєса зі змінною верхньою межею є пов. зр. функцією.

1 Формулювання основних результатів

Нехай l, ψ — монотонні, додатні на $[1,+\infty)$ функції, а

$$L(x)=\int_1^x \psi(t)dl(t).$$

У [3] знайдено достатні умови на функції ψ, l, l_1, l_2, за яких функція L є пов. зр., $l_1(x)\le L(x)\le l_2(x)$. В даній роботі ми вкажемо умови на функції ψ і l, щоб інтеграл Стільтьєса L був пов. зр. функцією.

Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що l — зростаюча функція. В протилежному випадку зобразимо функцію L у вигляді $L(x)=-\int_1^x\psi(t)dl_1(t)$, де $l_1(x)=l(1)-l(x)$.

Теорема 1. *Якщо ψ — спадна, l — пов. зр. функції, то L — пов. зр. функція.*

Зауваження 1.1. *Обернене твердження не є правильним. На це вказують приклади функцій $\psi(x)=\frac{1}{x}$, $l(x)=x$, для яких $L(x)=\ln x$.*

Зауваження 1.2. *Твердження теореми 1 показує, що в теоремі 2 з [3] умови на функції l_1 та l_2 є зайвими.*

Теорема 2. *Нехай ψ — зростаюча функція. Якщо функція L — пов. зр., то l є пов. зр., тобто*

$$l(2x)/l(x)-1\to 0,\quad x\to+\infty. \tag{1}$$

Навпаки, якщо l є пов. зр. і

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{l(x)\psi(x)}{L(x)}<+\infty, \tag{2}$$

то функція L — пов. зр.

Зауваження 1.3. *Для функцій $l(x)=\ln x$ та $\psi(x)=x$ умова (1) виконується. (2) не виконується, а $L(x)=x-1$ не є пов. зр. Тому умова (2) в теоремі 2 є істотною.*

Зауваження 1.4. *Для функцій $\psi(x)=x$ і $l(x)=x$ умова (1) не виконується, а умова (2) виконується, бо $L(x)=x^2/2$ і $\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2/2}=2$. Отже, цей приклад разом з прикладом із зауваження 1.3 показують незалежність умов (1) та (2).*

2 Допоміжні результати та доведення теорем

Доведення теорем спирається на наступне твердження.

Лема 2.1. *Нехай функція ψ — зростаюча. Якщо L — пов. зр., то*

$$\frac{\psi(x)}{L(x)}\big(l(2x)-l(x)\big)\to 0,\quad x\to+\infty. \tag{3}$$

Навпаки, якщо

$$\frac{\psi(2x)}{L(2x)}\big(l(2x)-l(x)\big)\to 0,\quad x\to+\infty, \tag{4}$$

то функція L є пов. зр.

Доведення. Маємо

$$\frac{L(2x)-L(x)}{L(x)}=\frac{\int_x^{2x}\psi(t)dl(t)}{L(x)}\ge\frac{\psi(x)(l(2x)-l(x))}{L(x)}\ge 0,$$

$$0\le\frac{L(2x)-L(x)}{L(2x)}=\frac{\int_x^{2x}\psi(t)dl(t)}{L(2x)}\le\frac{\psi(2x)(l(2x)-l(x))}{L(2x)}.$$

Якщо L — пов. зр., то з першого співвідношення отримуємо (3). З другої нерівності маємо, якщо (4) виконується, то L — пов. зр. □

Зауваження 2.1. *Умову (4) у лемі 2.1 не можна замінити на умову (3). Дійсно, нехай $\psi(x)=e^x$ і $l(x)=1-\frac{1}{e^x}$. Для цих функцій $L(x)=x$ не є пов. зр. Водночас умова (3) виконується, бо*

$$\frac{\psi(x)}{L(x)}\big(l(2x)-l(x)\big)=\frac{e^x}{x}\left(\frac{1}{e^x}-\frac{1}{e^{2x}}\right)\sim\frac{1}{x}\to 0,\quad x\to+\infty,$$

а (4) не виконується, бо

$$\frac{\psi(2x)}{L(2x)}\big(l(2x)-l(x)\big)=\frac{e^{2x}}{2x}\left(\frac{1}{e^x}-\frac{1}{e^{2x}}\right)\sim\frac{e^x}{2x}\to+\infty,\quad x\to+\infty.$$

Отже, умова (3) не є достатньою для пов. зр. функції L.

Аналогом леми 2.1 для спадних функцій ψ є наступне твердження, яке доводиться подібно.

Лема 2.2. *Нехай функція ψ — спадна. Якщо L — пов. зр. функція, то*

$$\frac{\psi(2x)}{L(2x)}\big(l(2x)-l(x)\big)\to 0,\quad x\to+\infty.$$

Навпаки, якщо

$$\frac{\psi(x)}{L(x)}\big(l(2x)-l(x)\big)\to 0,\quad x\to+\infty,$$

то функція L є пов. зр.

З лем 2.1 та 2.2 безпосередньо випливає твердження.

Наслідок 2.1. *Нехай ψ — монотонна функція і $l(2x) - l(x) \le A < +\infty$, де $A > 0$ — деяка стала. Для того, щоб функція L була пов. зр., необхідно і досить, щоб*

$$\psi(x) = o(L(x)), \quad x \to +\infty.$$

Перейдемо до доведення теорем.

Доведення теореми 1. Оскільки $\psi(x)$ — спадна функція, а $l(x)$ — зростаюча на $[1, +\infty)$, то

$$\int_x^{2x} \psi(t)dl(t) \le \psi(x)\big(l(2x) - l(x)\big),$$

а

$$\int_1^x \psi(t)dl(t) \ge \psi(x)\big(l(x) - l(1)\big).$$

Тому

$$0 \le \frac{L(2x) - L(x)}{L(x)} = \frac{\int_x^{2x} \psi(t)dl(t)}{\int_1^x \psi(t)dl(t)} \le \frac{\psi(x)\big(l(2x) - l(x)\big)}{\psi(x)\big(l(x) - l(1)\big)} = \left(\frac{l(2x)}{l(x)} - 1\right)\left(1 - \frac{l(1)}{l(x)}\right)^{-1}.$$

Позаяк за умовою теореми 1 l — пов. зр. функція, то з останнього співвідношення випливає, що L також є пов. зр. □

Доведення теореми 2. Враховуючи, що

$$L(x) = \int_1^x \psi(t)dl(t) \le \psi(x)l(x),$$

маємо

$$\frac{\psi(x)}{L(x)}\big(l(2x) - l(x)\big) \ge \frac{\psi(x)(l(2x) - l(x))}{\psi(x)l(x)} = \frac{l(2x)}{l(x)} - 1 \ge 0.$$

Оскільки L є пов. зр., то за лемою 2.1 виконується (3). З останнього співвідношення одержуємо пов. зр. функції l.

Навпаки, нехай l — пов. зр. функція. Завдяки умові (2) маємо $\frac{\psi(x)l(x)}{L(x)} < B$, де $B > 0$ — деяка стала. Тому

$$\frac{\psi(2x)}{L(2x)}\big(l(2x) - l(x)\big) \le \frac{\psi(2x)\big(l(2x) - l(x)\big)}{\frac{1}{B}\psi(2x)l(2x)} = B\left(1 - \frac{l(x)}{l(2x)}\right) \to 0, \ x \to +\infty,$$

і за лемою 2.1 (див. (4)) отримуємо пов. зр. функції L. □

3 Деякі зауваження та застосування результатів

Нехай l, ψ — зростаючі функції. Використовуючи теореми про інтегрування частинами та заміну змінних в інтегралах Стільтьєса, неважко показати, що умова (2) рівносильна умові

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\int_1^x l(t)d\psi(t)}{l(x)\psi(x)} < 1, \tag{5}$$

або за умови неперервності функції ψ на $[1, +\infty)$ — умові

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\int_1^x v(t)/t\, dt}{v(x)} < 1, \tag{6}$$

де $v(x) = xl\big(\psi^{-1}(x)\big)$. Справді,

$$\frac{1}{\psi(x)l(x)}\int_1^x l(t)d\psi(t) = 1 - \frac{\int_1^x \psi(t)dl(t)}{\psi(x)l(x)} = 1 - \frac{L(x)}{\psi(x)l(x)},$$

а отже, умова (2) рівносильна (5). Далі,

$$\int_1^x l(t)d\psi(t) = \int_{\psi(1)}^{\psi(x)} l\big(\psi^{-1}(t)\big)dt = \int_{\psi(1)}^{\psi(x)} \frac{v(t)}{t}dt,$$

і оскільки $v(\psi(x)) = \psi(x)l\Big(\psi^{-1}\big(\psi(x)\big)\Big) = \psi(x)l(x)$, то умова (5) еквівалентна (6).

Зауваження 3.1. *Введення у розгляд функції v дає змогу навести просту достатню умову для виконання (6), а отже і (2). Якщо для деякого $\rho > 1$ $\varlimsup_{x\to+\infty} v(x)/x^\rho < \rho \varliminf_{x\to+\infty} v(x)/x^\rho$, то справджується (6).*

Позначимо через $n(x)$ і $N(x)$ відповідно лічильну та неванліннову лічильну функції послідовності точок (a_n) комплексної площини, $a_n \to \infty$ при $n \to +\infty$.

Зауваження 3.2. *З наслідку 2.1 і формули $N(x) = \int_1^x n(t)d\ln t$ отримуємо, що $N(x)$ є пов. зр. функцією тоді і тільки тоді, коли $n(x) = o\big(N(x)\big)$, $x \to +\infty$ (див. [4]).*

Добре відомо, що коли $n(x)$ — пов. зр., то $N(x)$ також пов. зр. функція. Навпаки не завжди правильно. З теореми 2 випливає достатня умова пов. зр. функції $n(x)$.

Твердження 3.1. *Якщо для деякої зростаючої функції ψ інтеграл $\int_1^x \psi(t)dn(t)$ є пов. зр. функцією, то $n(x)$ — пов. зр.*

Нехай f — ціла функція нульового порядку така, що

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n(r, 1/f)\ln r}{N(r, 1/f)} < +\infty. \tag{7}$$

Завдяки (7) і формулі $N(r, 1/f) = \int_1^r n(t, 1/f)d\ln t$, з теореми 2 випливає, що $N(r, 1/f)$ є пов. зр. функцією, а отже (див. [1]), і функція $T(r, f)$ — пов. зр. Враховуючи теорему A отримаємо таке твердження.

Твердження 3.2. *Якщо f — ціла функція нульового порядку, яка задовольняє умову (7), то f не має скінченних валіронових виняткових значень.*

Нехай f — мероморфна в $\mathbb{C}$ функція, для якої

$$\overset{\circ}{A}(r, f) = o(\overset{\circ}{T}(r, f)), \quad r \to +\infty. \tag{8}$$

Із зображення $\overset{\circ}{T}(r, f) = \int_0^r \overset{\circ}{A}(t, f)d\ln t$ і наслідку 1.1 отримуємо, що $\overset{\circ}{T}(r, f)$ — пов. зр. функція. Оскільки (див., наприклад, [2, с. 33]) $|T(r, f) - \overset{\circ}{T}(r, f)| \le C$, де C — деяка стала, то $T(r, f)$ — пов. зр. Звідси і з теореми B випливає наступне твердження.

Твердження 3.3. *Якщо f — мероморфна в $\mathbb{C}$ функція, для якої виконується (8) і ∞ є винятковим неванліновим значенням, то за асимптотичну криву, на якій $f(z) \to \infty$, можна взяти для майже всіх $\theta \in [0, 2\pi)$ промінь $\{z : \arg z = \theta\}$.*

Література

1. Гольдберг А.А., Заболоцкий Н.В. *Индекс концентрации субгармонической функции нулевого порядка* // Матем. заметки. — 1983. — Т. 34, № 2. — С. 227–236.
2. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций — М.: Наука. — 1970. — 592 с.
3. Заболоцький М.В. *Повільне зростання інтегралів Стільтьєса* // Крайові задачі для диференціальних задач. Збірник наук. праць, Чернівці. — 2001. — Вип. 7. — С. 71–75.
4. Заболоцкий Н.В., Шеремета М.Н. *О медленном возрастании основных характеристик целых функций* // Матем. заметки. — 1999. — Т.65, №2. — С. 206–214.
5. Anderson J.M. *Asymptotic values of meromorphic functions of smooth growth*, Glasgow Math. J., **20**, 2 (1979), 155–162.
6. Hayman W.K. *On Iversen's theorem for meromorphic functions with few poles*, Act. Math, **141**, (1978), 115–145.
7. Hayman W.K. *Slowly growing integral and subharmonic function*, Comment. Math. Helv., **34**, 1 (1960), 75–84.
8. Valiron G. *Sur les valuers deficientes des fouctions algebroides meromorphes d'ordre nul*, J. d'Analyse Math. **1**, (1951), 28–42.

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Львів, Україна
e-mail: *matmod@franko.lviv.ua*

Надійшло 1.12.2011

Zabolotskyi M.V., Kostiuk O.V. *Slow growing of Stieltjes integrals of monotone functions*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 43–48.

We establish necessary and sufficient conditions for slow growth of Stieltjes integral of monotone functions. Obtained results are applied to studying of value distribution and growth of Nevanlinna characteristics of meromorphic functions in $\mathbb{C}$.

Заболоцкий Н.В., Костюк О.В. *Медленный рост интегралов Стильтьеса от монотонных функций* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 43–48.

Найдены необходимые и достаточные условия на монотонные функции ψ и l, при которых интеграл Стильтьеса $L(x) = \int_1^x \psi(t)dl(t)$ является медленно возрастающей функцией. Полученные результаты применены для исследования распределения значений и роста неванлинновских характеристик мероморфных в $\mathbb{C}$ функций.

Карпатські математичні публікації. Т.4, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №1

УДК 517.98

Загороднюк А.В.[1], Митрофанов М.А.[2]

СЛАБКО ПОЛІНОМІАЛЬНА ТА СЛАБКО АНАЛІТИЧНА ТОПОЛОГІЯ НА БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ І НА ПРОСТОРАХ ФРЕШЕ

Загороднюк А.В., Митрофанов М.А. *Слабко поліноміальна та слабко аналітична топологія на банахових просторах і на просторах Фреше* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — С. 49–57.

У роботі досліджено умови співпадіння слабкої поліноміальної та слабкої аналітичної топології (слабкої $*$-поліноміальної та слабкої $*$-аналітичної топології) з топологією норми на дійсних (комплексних) банахових просторах та просторах Фреше.

Вступ

Поняття розділяючого полінома було вперше введено у розгляд Я. Курцвейлом у 1954 році у роботі [12] для встановлення умов апроксимації неперервних функцій аналітичними на дійсних сепарабельних банахових просторах. Властивості розділяючих поліномів та умови їх існування досліджувались різними авторами. Ґрунтовні огляди з цього питання можна знайти у роботах [10] та [11]. Для апроксимації рівномірно неперервних функцій на дійсних банахових просторах у праці [8] були введені у розгляд рівномірно аналітичні розділяючі функції. Для апроксимації неперервних функцій на комплексних банахових просторах у праці [2] було розглянуто поняття $*$-полінома, $*$-аналітичної функції та розділяючого $*$-полінома, рівномірно $*$-аналітичної і розділяючої функції.

У цій статті розглядаються топологічні властивості банахових просторів та просторів Фреше в залежності від існування розділяючих поліномів та рівномірно аналітичних розділяючих функцій.

Означення 1. *Нехай X — нормований простір над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Дійсний поліном $q\colon X \to \mathbb{R}$ називається розділяючим поліномом, якщо $q(x)$ задовольняє умову*

$$\inf_{x \in X,\ \|x\|=1} |q(x) - q(0)| > 0.$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 46G20, 46T20.
Ключові слова і фрази: банахові простори, простори Фреше, розділяючі поліноми, розділяючі рівномірно аналітичні функції, слабко поліноміальна топологія, слабко аналітична топологія, топологія норми.

Це означення використовується Курцвейлом у [13]. З означення 1 випливає, що дійсний поліном $q : X \to \mathbb{R}$ *не є розділяючим*, якщо q задовольняє умову

$$\inf_{x\in X,\ ||x||=1} |q(x) - q(0)| = 0.$$

Лема 1. *Якщо дійсний поліном $q(x)$ не є розділяючим на кулі радіуса 1 в банаховому просторі X, то він не є розділяючим на кулі довільного радіуса r в X. Тобто $\forall r\ \inf_{x\in X,\ ||x||=r} |q(x) - q(0)| = 0$.*

Означення 2. *$*$-Поліном $P : X \to \mathbb{C}$ називається розділяючим $*$-поліномом, якщо*

$$\inf_{x\in X,\ ||x||=1} |P(x) - P(0)| > 0.$$

Означення 3. *Нехай X є дійсним банаховим простором. Будемо казати, що дійсна функція d, визначена на X, є рівномірно аналітичною і розділяючою, якщо вона задовольняє наступні умови:*

1) d є дійсною аналітичною функцією на X в кожній точці $x \in X$ з радіусом збіжності R_{d_x} більшим або рівним за R_d для деякого $R_d > 0$,

2) існує $\beta \in \mathbb{R}$ таке, що для всіх $x \in X$ множина $d(x) < \beta$ є непорожньою і лежить у відкритій одиничній кулі B.

Означення 4. *Будемо казати, що функція $Q : X \to Y$ вигляду $Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)$ для всіх $x \in X$, де $Q_n(x)$ — n-однорідні $*$-поліноми, є рівномірно $*$-аналітичною та розділяючою, якщо вона задовольняє наступні умови:*

1) існує таке число R_Q, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)$ збігається рівномірно в кулі радіуса R_Q з центром у довільній точці $x_0 \in X$.

2) існує таке $\beta \in \mathbb{R}$, що множина таких $x \in X$, що $|Q(x)| < \beta$ є непорожньою і лежить у відкритій одиничній кулі B.

Зауважимо, що враховуючи аналітичність, з умови 2) випливає, що існує $\beta \in \mathbb{R}$ таке, що множина всіх $x \in X$, для яких $d(x) \geq \beta$, не належить одиничній кулі B.

У дисертації [3] отримано наступний результат.

Теорема 1. *Нехай X та Y банахові простори, $f : Y \to \mathbb{R}$ є рівномірно аналітичною і розділяючою функцією, $g : X \to Y$ — лінійне відображення, яке володіє властивістю*

$$||g(x)|| \geqslant ||x|| \text{ для довільного } x \in X \text{ такого, що } ||x|| = 1.$$

Тоді композиція $f \circ g$ є рівномірно аналітичною і розділяючою функцією обмеженого типу.

Нехай $\mathcal{P}(X)$ — простір неперервних поліномів на X. Визначимо *слабко поліноміальну топологію* на дійсному банаховому просторі X, як найслабшу топологію w_P відносно якої всі неперервні поліноми на X зі значеннями в полі $\mathbb{R}$ будуть неперервними. Ця топологія породжується прообразами відкритих множин з $\mathbb{R}$ поліноміальних функціоналів на X. Базу цієї топології утворюють околи точок $x_0 \in X$, кожен з яких залежить від скінченного набору поліномів $p_1, \dots, p_n$ і додатних чисел $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ та має вигляд

$$U(x_0)^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}_{p_1,\dots,p_n} = \{x \in X : |p_1(x) - p_1(x_0)| < \varepsilon_1, \dots, |p_n(x) - p_n(x_0)| < \varepsilon_n\}. \quad (1)$$

Напрямленість (x_α) збігається у топології w_P до $x_0 \in X$ тоді (і тільки тоді) коли $p(x_\alpha) \to p(x_0)$ для кожного $p \in \mathcal{P}(X)$.

Визначимо *слабко аналітичну топологію* на дійсному банаховому просторі X, як найслабшу топологію w_A відносно якої всі неперервні аналітичні функції на X зі значеннями в полі $\mathbb{R}$ будуть неперервними. Ця топологія породжується прообразами відкритих множин з $\mathbb{R}$ аналітичних функціоналів на X. Базу цієї топології утворюють околи точок $x_0 \in X$, кожен з яких залежить від скінченного набору аналітичних функцій $f_1, \dots, f_n$ і додатних чисел $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ та має вигляд

$$U(x_0)^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}_{f_1,\dots,f_n} = \{x \in X : |f_1(x) - f_1(x_0)| < \varepsilon_1, \dots, |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon_n\}. \quad (2)$$

Поряд зі слабко аналітичною топологією ми можемо розглянути *рівномірно слабко аналітичну топологію* використавши у формулі (2) замість набору аналітичних функцій набір рівномірно аналітичних функцій.

У праці [4] розглянуто поняття A-збіжності, яка у наших термінах співпадає зі слабко аналітичною збіжністю. Зокрема у [4] поставлено питання: чи A-збіжность на комплексних банахових просторах співпадає зі збіжністю за нормою? У [7] дано негативну відповідь на це питання. У даній роботі досліджено умови співпадіння слабкої поліноміальної та слабкої аналітичної топології (слабкої $*$-поліноміальної та слабкої $*$-аналітичної топології) з топологією норми на дійсних (комплексних) банахових просторах та просторах Фреше.

Аналогічно на комплексному банаховому просторі ми визначимо *слабко $*$-поліноміальну топологію* (*слабко $*$-аналітичну топологію*) як найслабшу топологію w_P відносно якої всі неперервні $*$-поліноми ($*$-аналітичні функції) на X зі значеннями в полі $\mathbb{C}$ будуть неперервними.

1 Випадок банахових просторів

Теорема 2. *Слабко поліноміальна топологія на дійсному просторі X збігається з топологією норми тоді і тільки тоді, коли на X існує розділяючий поліном.*

Доведення. Зауважимо, що оскільки прообрази відкритих множин при неперервних відображеннях є відкритими, w_P-відкриті множини є відкритими в топології норми. Тобто w_P є слабшою топологією за топологію норми. Нехай на X існує розділяючий n-однорідний поліном q. Розглянемо w_P-збіжну напрямленість (x_α) до $x_0 \in X$. Для будь-якого натурального M визначимо поліном $p_M(x) := M^n q(x - x_0) = q(Mx - Mx_0)$. Збіжність (x_α) у слабко поліноміальній топології зокрема означає, що для будь-якого $M \in \mathbb{N}$ і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує α_0 таке, що для всіх $\alpha > \alpha_0$

$$|p_M(x_\alpha) - p_M(x_0)| = |q(Mx_\alpha - Mx_0)| < \varepsilon.$$

Виберемо $\varepsilon < \inf_{\|x\|=1} |q(x)|$ (згідно з означенням розділяючого полінома ми це можемо зробити). Тоді $\|Mx_\alpha - Mx_0\| < 1$. Справді, якщо $\|Mx_\alpha - Mx_0\| = c \geq 1$, то

$$\left|q\Big(\frac{Mx_\alpha - Mx_0}{c}\Big)\right| < \frac{\varepsilon}{c^n} < \inf_{\|x\|=1} |q(x)|,$$

що неможливо. Отже $\|x_\alpha - x_0\| < 1/M$, а це і означає, що (x_α) прямує до x_0 в топології норми. Таким чином топологія норми є слабшою за слабко поліноміальну. Тому вони співпадають.

Припустимо тепер, що w_P співпадає з топологією норми. Оскільки околи вигляду (1) утворюють базу w_P, то існує непорожній окіл $U(x_0)^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}_{p_1,\dots,p_n}$, який повністю лежить у відкритій одиничній кулі B_X з центром в нулі простору X. Перейшовши до поліномів $p_k(x - x_0)$ можна вважати, що $x_0 = 0$. Крім того, без втрати загальності можна вважати, що $p_k(0) = 0$, $k = 1, \dots, n$. Визначимо $q(x) = \sum_{k=1}^n (p_k(x))^2$ і $\varepsilon = \sum_{k=1}^n \varepsilon_n^2$. Тоді

$$U(0)^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}_{p_1,\dots,p_n} = U(0)^\varepsilon_q = \{x \in X : |q(x)| < \varepsilon\} \subset B_X.$$

Тобто для кожної точки $x \in X$, $\|x\| = 1$ маємо, що $|q(x)| \geq \varepsilon$. Отже q — розділяючий поліном. □

Зауважимо, що оскільки неперервні поліноми розділяють точки простору X, то слабко поліноміальна топологія є гаусдорфовою. Тому, за теоремою Стоуна-Вейєрштраса (див. [6, теорема 3.2.21]), кожна w_P-неперервна функція на X наближається поліномами рівномірно на компактах у топології w_P. У випадку, коли X допускає розділяючий поліном, w_P-компакти є компактами в $(X, \|\cdot\|)$ і мають порожню внутрішність, якщо $\dim X = \infty$. Проте, саме в цьому випадку (теорема Курцвейля) кожна рівномірно неперервна функція на X апроксимується аналітичними функціями рівномірно на всьому просторі. Можливий інший крайній випадок, коли слабко поліноміальна топологія співпадає зі слабкою топологією на обмежених множинах. Тоді замкнена куля в $\overline{B}_X \in X$ є w_P-відносно компактним простором і теорема Стоуна-Вейєрштраса гарантує, що кожна $*$-слабко неперервна функція на $\overline{B}_{X''}$ апроксимується поліномами рівномірно на $\overline{B}_X$. Проте і в цьому випадку може трапитись, що X допускає рівномірно аналітичну розділяючу функцію (як, наприклад, $X = c_0$) і кожна рівномірно неперервна функція апроксимується аналітичними рівномірно на X [8]. З іншого боку існує багато просторів (як, наприклад, ℓ_p для непарних p) для яких w_P є строго сильнішою за слабку топологію на обмежених множинах і строго слабшою за топологію норми, і в яких не кожна неперервна функція наближається аналітичними на X. Ці приклади показують, що апроксимація аналітичними функціями суттєво відрізняється від поліноміальної апроксимації і умови існування такої апроксимації суттєво відрізняються від умов теореми Стоуна-Вейєрштраса.

Добре відомо, що у нескінченновимірному банаховому просторі одинична сфера є щільною в одиничній кулі у слабкій топології. Наступна теорема показує, що при певних умовах w_P має таку ж властивість.

Теорема 3. *Нехай X — нескінченновимірний дійсний банахів простір. Одинична сфера S_X є щільною в одиничній кулі $\overline{B}_X$ у слабко поліноміальній топології тоді і тільки тоді, коли X не допускає розділяючого полінома.*

Доведення. Припустимо що сфера S_X є щільною в $\overline{B}_X$ у слабко поліноміальній топології. Тоді існує напрямленість $(x_\alpha) \subset S_X$ така, що $p(x_\alpha) \to 0$ для кожного $p \in \mathcal{P}(X)$. Це означає, що жоден поліном $p \in \mathcal{P}(X)$ не є розділяючим.

Припустимо, що не існує розділяючих поліномів на X. Покажемо, що 0 належить замиканню S_X у w_P. Для цього достатньо показати, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ і скінченного набору поліномів $p_1, \dots, p_n$ існує елемент $x \in S_X$ такий, що $|p_k(x)| < \varepsilon$, $k = 1, \dots, n$. Такий елемент існує, оскільки $p = \sum_{k=1}^n p_k^2$ не розділяючий і в якості x можна взяти елемент з S_X для якого $|p(x)| < \varepsilon$.

Нехай, x_0 — довільний вектор з B_X. Застосувавши афінне ізометричне перетворення $x \mapsto x - x_0$ зведемо нашу задачу до пошуку напрямленості в $S_X - x_0$, яка слабко поліноміально збігається до нуля. Виберемо $r > 0$ так, що куля rB_X радіуса r з центром нулі лежить в $B_X - x_0$. Оскільки не існує розділяючого полінома на X, то за лемою 1 не існує полінома q, який би відділяв сферу rS_X від нуля. Повторюючи міркування з попереднього абзацу отримуємо напрямленість $x_\alpha \in rS_X$, яка слабко поліноміально збігається до нуля. Нехай $y_\alpha = \lambda_\alpha x_\alpha$, де λ_α — таке додатне число, що $y_\alpha \in S_X - x_0$. Зауважимо, що $\lambda_\alpha < 2$. Оскільки для кожного m-однорідного полінома p_m, $|p_m(x_\alpha)| \to 0$, то $|p_m(y_\alpha)| \leq 2^m |p_m(x_\alpha)| \to 0$. Довільний поліном є сумою однорідних, тому $p(y_\alpha) \to 0$. □

Нехай простір X є комплексним банаховим простором. Припустимо, що на просторі X існує розділяючий $*$-поліном q. Якщо на X розглянути слабко $*$-поліноміальну топологію, то для простору X виконується аналогічна до теореми 2

Теорема 4. *Слабко $*$-поліноміальна топологія на комплексному банаховиому просторі X збігається з топологією норми тоді і тільки тоді, коли на X існує розділяючий $*$-поліном.*

Доведення. Для комплексного банахового простору X позначимо через $\widetilde{X}$ той самий простір (як множину), але над полем дійсних чисел. Точніше, носії просторів X та $\widetilde{X}$ співпадають, але на $\widetilde{X}$ визначено тільки множення на дійсні скаляри. Якщо на просторі X існує розділяючий $*$-поліном q, то на просторі $\widetilde{X}$ існує розділяючий поліном $p = q\bar{q}$. Оскільки, слабко $*$-поліноміальна топологія на комплексному банаховиому просторі X співпадає зі слабко поліноміальною топологією на просторі $\widetilde{X}$, ми можемо застосувати до $\widetilde{X}$ теорему 2. □

Аналогічно легко довести аналог теореми 3.

Теорема 5. *Нехай X — нескінченновимірний комплексний банахів простір. Одинична сфера S_X є щільною в одиничній кулі $\overline{B}_X$ у слабко $*$-поліноміальній топології тоді і тільки тоді, коли X не допускає розділяючого $*$-полінома.*

Теорема 6. *Якщо на дійсному просторі X існує розділяюча аналітична функція, то слабко аналітична топологія на X збігається з топологією норми. Якщо рівномірно слабко аналітична топологія на дійсному просторі X збігається з топологією норми, то на X існує розділяюча аналітична функція.*

Доведення. Зауважимо, що оскільки прообрази відкритих множин при неперервних відображеннях є відкритими, w_A-відкриті множини є відкритими в топології норми. Тобто w_A є слабшою топологією за топологію норми. Нехай на X існує розділяюча аналітична функція q. Розглянемо w_A-збіжну напрямленість (x_α) до $x_0 \in X$. Для будь-якого натурального M визначимо аналітичну функцію $f_M(x) := q(Mx - Mx_0)$. Оскільки q розділяюча аналітична функція, то за теоремою 1 для довільного $M \in \mathbb{N}$ функція $q(Mx)$ буде розділяючою аналітичною функцією. З іншого боку, якщо напрямленість (x_α) збігається до $x_0 \in X$ в w_A топології, то для довільного $\varepsilon > 0$ існує α_0, що для $\alpha > \alpha_0$ $q(M(x_\alpha - x_0)) < \varepsilon$. Покажемо, що $\|x_\alpha - x_0\| \to 0$. Припустимо, що це не так, тобто існує таке δ, що для довільного α_0 існує $\alpha > \alpha_0$ таке, що $\|x_\alpha - x_0\| > \delta$. Зафіксуємо $M \in \mathbb{N}$ таке, щоб $M > \frac{1}{\delta}$, тоді для довільного α_0 існує $\alpha > \alpha_0$ таке, що $\|Mx_\alpha - Mx_0\| > 1$. Візьмемо число $\beta \in \mathbb{R}$ з означення 3. Якщо $q(x) < \beta$, то $x \leqslant 1$, тому виберемо $\varepsilon < \beta$. Отримаємо, що $q(M(x_\alpha - x_0))\varepsilon < \beta$, але $|M(x_\alpha - x_0)| > 1$. Це суперечить тому, що q рівномірно аналітична розділяюча функція.

Припустимо тепер, що w_{RA} співпадає з топологією норми. Оскільки околи вигляду (2) утворюють базу w_{RA}, то існує непорожній окіл $U(x_0)^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}_{f_1,\dots,f_n}$, який повністю лежить у відкритій одиничній кулі з центром в нулі B_X простору X. Без втрати загальності можемо вважати, що $x_0 = 0$ та $f_k(0) = 0$, $k = 1, \dots, n$. Визначимо $q(x) = \sum_{k=1}^n (f_k(x))^2$ і $\varepsilon = \sum_{k=1}^n \varepsilon_n^2$. Тоді

$$U(0)^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}_{f_1,\dots,f_n} = U(0)^{\varepsilon}_{q} = \{x \in X : |q(x)| < \varepsilon\} \subset B_X.$$

Тобто для кожної точки $x \in X$, $\|x\| = 1$ маємо, що $|q(x)| \geq \varepsilon$. Оскільки всі f_k, $k = 1, \dots, n$, є рівномірно аналітичними, то q рівномірно аналітична функція. Отже q — рівномірно аналітична розділяюча функція. □

Питання співпадіння слабко аналітичної топології з рівномірно слабко аналітичною топологією залишається відкритим.

Наслідок 1. *На просторах l_p та L_p для парних p слабко поліноміальна топологія збігається зі слабко аналітичною топологією та топологією норми.*

Наслідок 2. *На замкнених підпросторах c_0 слабко аналітична топологія збігається з топологією норми.*

Наслідок 3. *На просторі c_0 слабко поліноміальна топологія не співпадає зі слабко аналітичною топологією.*

2 Випадок просторів Фреше

Нагадаємо, що лінійний топологічний простір X є простором Фреше, якщо X є метризовним повною метрикою локально опуклим простором. Відомо, що це означення

еквівалентне до наявності на X зліченної системи узгоджених напівнорм (див. [1, 3.5.3]) $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, які задають повну метрику ρ на X наступним способом [5]

$$\rho(x, y) = \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)}.$$

Топологія, що породжується метрикою ρ на просторі X, є найслабшою топологією, відносно якої всі напівнорми p_n є неперервними. Базу околів нуля цієї топології утворює сім'я $\{U_{p_n}(0) : n \in \mathbb{N}\}$, де $U_{p_n}(0) = \{x \in X :\ p_k(x) < \frac{1}{n}$ для всіх $1 \leqslant k \leqslant n\}$. При цьому послідовність $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ точок простору X прямує до точки $x_0 \in X$ тоді і лише тоді, коли для довільного $k \in \mathbb{N}$ послідовність $\{p_k(x_n - x_0) : n \in \mathbb{N}\}$ прямує до нуля при $n \to \infty$. Для нормованого простору Y функція $f : X \to Y$ є неперервною в точці x_0, якщо для довільної послідовності $\{x_n\} \subset X$, що прямує до x_0, послідовність $\{f(x_n)\} \subset Y$ прямує до $f(x_0)$.

Зафіксуємо напівнорму p_n на X. Відомо, що $\ker p_n$ є замкненим лінійним підпростором. Для довільного $n \in \mathbb{N}$ позначимо через X_n простір X з нормою $\|\cdot\|_n$, тобто $X_n = (X, \|\cdot\|_n)$. Аналогічно як і у випадку банахових просторів визначимо *слабко поліноміальну топологію, слабко аналітичну топологію* (*слабко $*$-поліноміальну топологію, слабко $*$-аналітичну топологію*) на дійсному (комплексному) просторі Фреше X як найслабшу топологію w_P, відносно якої всі неперервні поліноми ($*$-поліноми), аналітичні ($*$-аналітичні) функції на X зі значеннями в полі $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) будуть неперервними.

Зрозуміло, що простір $\mathcal{P}(X)$ всіх неперервних поліномів на просторі X містить простір $\mathcal{P}(X_n)$ всіх неперервних поліномів на просторі X_n для довільного $n \in \mathbb{N}$.

Позначимо через w_{P_n} слабко поліноміальну топологію на просторі X_n. На просторі X очевидним є наступне співвідношення топологій $w_P \succ w_{P_n}$, тобто топологія w_P сильніша за топологію w_{P_n}.

Теорема 7. *Нехай простір X є дійсним простором Фреше зі зліченною системою норм $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, який не є банаховим простором, тоді X не допускає полінома, який був би розділяючим для всіх X_n.*

Доведення. Припустимо, що на просторі X існує поліном p, який є розділяючим для всіх X_n. Тоді топологія w_{P_n} співпадає з топологією норми $\|\cdot\|_n$ на кулі в X_n. Але, як зауважено вище, топологія w_P сильніша за топологію w_{P_n}, отже, топологія w_P є сильнішою за топологію норми на X_n. З іншого боку топологія w_P є слабшою за топологію Фреше на X, яка є найслабшою топологією, в якій всі $\|\cdot\|_n$ неперервні. Отже, w_P є слабшою за топологію норми $\|\cdot\|_n$ для довільного $n \in \mathbb{N}$. Тому топологія Фреше співпадає з топологією норми на просторі X, але це суперечить умові теореми про те, що простір X не є банаховим. □

Подібним чином легко довести комплексний аналог теореми 7.

Теорема 8. *Нехай простір X є сепарабельним комплексним простором Фреше зі зліченною системою норм $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, який не є банаховим простором, тоді X не допускає розділяючого $*$-полінома.*

Теорема 9. *Нехай простір X є дійсним простором Фреше зі зліченною системою норм $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, який не є банаховим простором. Якщо для довільного $n\in\mathbb{N}$ простір X_n допускає розділяючий поліном f_n, то існує аналітична функція f на X, яка є рівномірно аналітична розділяюча для всіх X_n.*

Доведення. Побудуємо за системою напівнорм $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ зростаючу систему напівнорм $\{\|\cdot\|_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$, поклавши $\{\|\cdot\|_i' = \sum_{n=1}^{i}\|\cdot\|_n\}_{i,n\in\mathbb{N}}$.

Без втрати загальності можна вважати, що f_n — однорідні розділяючі поліноми такі, що $\|f_n\|_n = 1$, $\deg f_n = m_n$ для кожного $n\in\mathbb{N}$ та $m_1 \leqslant m_2 \leqslant m_n \leqslant \ldots$. Тоді $m_1 < 2m_2 < \ldots < nm_n < \ldots$.

Розглянемо функцію $f = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(m_n n)!}f_{m_n}^n = \sum_{n=1}^{\infty} g_{m_n}$, де $g_{m_n} = \frac{1}{(nm_n)!}f_{m_n}^n$. З того що $\|f_n\|_n = 1$ отримуємо $\|g_{m_n}\|_N = \frac{1}{(nm_n)!}\|f_{m_n}^n\|_N \leqslant \frac{1}{(nm_n)!}$ для всіх $N > m_n$. Тому для довільного X_n радіус збіжності функції f дорівнює нескінченності, оскільки

$$\frac{1}{R(g)} = \limsup_{n\to\infty}\|g(n)\|_n^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Для функції f виконується друга властивість рівномірно аналітичної і розділяючої функції у кожному просторі X_n, а саме для довільного $n\in\mathbb{N}$ існує число β_n таке, що множина $\{x\in X_n : |f(x)| < \beta_n\}$ є непорожньою і лежить у відкритій одиничній кулі простору X_n. Справді, для довільного $n\in\mathbb{N}$ можна вибрати β_n так, щоб з рівності $\|x\|_n = 1$ випливала нерівність $f(x)\geqslant\beta_n$. Оскільки f_{m_n} — розділяючі поліноми, то досить вибрати β_n так, щоб $0 < \beta_n \leqslant \frac{1}{(nm_n)!}$. □

Література

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа — М.: Наука, 1989. — 634 с.
2. Митрофанов М.А. *Аппроксимация непрерывных функций на комплексных банаховых пространствах* // Математические заметки — 2009. — Т. 86, Вып.4. — С. 557–570.
3. Митрофанов М.А. Неперервні відображення на банахових просторах. Апроксимація та зв'язок з алгебрами аналітичних функцій. Дисертація на здобуття наук. ступеня канд. фіз.- мат. наук: 01.01.01 — Івано-Франківськ, 2011 — 132 с.
4. Петунин Ю.И., Савкин В.Н. *Сходимость, порожденная аналитическими функционалами, и изоморфизм алгебр аналитических функционалов* // Укр. мат. журн. — 1988. — Т.40, № 6. — С. 799–803.
5. Шефер Х. Топологические векторные пространства — М.: Мир, 1971. — 360 с.
6. Энгелькинг Р. Общая топология — М.: Мир, 1986. — 752 с.
7. Aron R.M., Cole B.J., Gamelin T.W. *Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space*. J. Reine Angew. Math., **415**, (1991), 51–93.
8. Boiso M.C., Hájek P. *Analytic Approximations of Uniformly Continuous Functions in Real Banach Spaces*. J. Math. Anal. Appl., **256** (2001), 80–98.
9. Dineen S. Complex analysis on infinite-dimensional spaces. Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag London. Ltd., London, 1999.

10. Fabian M., Preiss D., Whitfield J. H. M., Zizler V.E. *Separating polynomials on Banach spaces*, Quart. J. Math. Oxford Ser., **40**, 2 (1989), 409–422.
11. Gonzalo R. Jaramillo J.A. *Separating polynomials on Banach spaces* Extracta mathematicae, **12**, 2 (1997), 145–164.
12. Kurzweil J. *On approximation in real Banach spaces*, Studia Math., **14**, (1954), 214–231.
13. Kurzweil J. *On approximation in real Banach spaces by analytic operations*, Studia Math., **16**, (1957), 124–129.

[1] Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна
e-mail: *andriyzag@yahoo.com*

[2] Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України,
Львів, Україна

Надійшло 16.04.2012

Zagorodnyuk A.V. Mytrofanov M.A. *Weak polynomial topology and weak analytic topology on Banach spaces and on Freshet spaces*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 49–57.

We investigate under which conditions weak polynomial or weak analytic topology (∗-weak polynomial or ∗-weak analytic topology) coincides whith the norm topology on a real (complex) Banach or Freshet space.

Загороднюк А.В., Митрофанов М.А. *Слабо полиномиальная и слабо аналитическая топология на банаховых пространствах и на простанствах Фреше* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 49–57.

В роботе исследованы условия совпадений слабой полиномиальной и слабой аналитической топологий (слабой ∗-полиномиальной и слабой ∗-аналитической топологий) с топологией нормы на действительных (комплексных) банаховых пространствах и пространствах Фреше.

Карпатські математичні публікації. Т.4. №1

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №1

УДК 515.12+512.58

Копорх К.М.

ПРОСТІР ВІДКРИТИХ ФАКТОРВІДОБРАЖЕНЬ ЗБІЖНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

Копорх К.М. *Простір відкритих факторвідображень збіжної послідовності* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — С. 58–66.

Наведено деякі властивості топології простору фактороб'єктів збіжної послідовності. Зокрема, показано, що цей простір розкладається в об'єднання двох множин, одна з яких всюди щільна, а інша — гомеоморфна простору ірраціональних чисел.

Вступ

Топологія гіперпросторів (просторів замкнених підмножин) нульвимірних метричних компактних просторів є добре вивчена (див., наприклад, [1]). Автор в [3], [4] розглянув дуальний до гіперпростору об'єкт — простір $\Psi(X)$ відкритих факторвідображень компактного простору X. Виникає природна задача опису топологічних властивостей простору $\Psi(X)$ для різних просторів X. Метою цієї замітки є розгляд випадку, коли $X = S$ (збіжна послідовність). Зауважимо, що гіперпростір $\exp S$ розглянуто в роботі [7]. У ній доведено, що простір $\exp S$ є об'єднанням канторової множини та всюди щільної зліченної множини ізольованих точок.

Ми показуємо, що $\Psi(S)$ є досконалим нульвимірним некомпактним метризовним простором, який розкладається в об'єднання двох множин, одна з яких всюди щільна, а інша — досконала.

Надалі вважаємо, що всі відображення топологічних просторів є неперервними.

1 Основні поняття та означення

Нехай X — компактний гаусдорфовий простір (компакт), $f\colon X \to Z$ — неперервне, відкрите, сюр'єктивне відображення компактних гаусдорфових просторів. Як звичайно, $\exp X$ ми позначаємо гіперпростір (множину непорожніх, замкнених підмножин

2010 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30.
Ключові слова і фрази: гіперпростір, факторвідображення, топологія Вієторіса.

простору X), наділений топологією Вієторіса. Базою цієї топології може служити сім'я множин

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle = \{A \in \exp X \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i, A \cap U_i \neq \varnothing \text{ для кожного } i = 1, 2, \ldots, n\},$$

де $n \in \mathbb{N}$ і множини $U_1, U_2, \ldots U_n$ пробігають топологію простору X.

У випадку, коли X — метризовний компакт, топологія Вієторіса породжується метрикою Гаусдорфа

$$d_H(E, F) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid E \subseteq O_\varepsilon(F) \text{ і } F \subseteq O_\varepsilon(E)\}.$$

Доведення цього факту можна знайти у підручнику [6]. Має місце наступний результат (див. [6, с. 131, 189]):

Теорема 1. *Простір компактних підмножин повного метричного простору з метрикою гаусдорфа повний.*

Теорема 2. *Якщо X — нульвимірний компакт, то $(\exp X, \tau_V)$ — нульвимірний компакт.*

Послідовність $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ елементів простору $\exp X$ збігається до елемента $A \in \exp X$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує номер $N_0 \in \mathbb{N}$ такий, що всі елементи послідовності починаючи з номера N_0 містяться в ε-околі елемента A. Має місце наступний результат ([6, с.95]):

Теорема 3. *Нехай X — регулярний простір, $\{K_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \exp X$ і $\{F_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \exp X$ такі, що $K_n \subset F_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Якщо послідовність $K_n \longrightarrow K$ і $F_n \longrightarrow F$ в топології Вієторіса, то $K \subset F$.*

Відомо, що відкритість відображення $f\colon X \to Z$ еквівалентна неперервності відображення $f^{-1}\colon Z \to \exp X$. Образом простору Z при відображенні $F = f^{-1}\colon Z \to \exp X$ є непорожня, замкнена підмножина $F(Z)$ в $\exp X$, тобто елемент простору $\exp(\exp X) = \exp^2 X$. Маємо

$$F(Z) = \{f^{-1}(z) \mid z \in Z\} = \{f^{-1}(f(x)) \mid x \in X\}.$$

Нехай $f_i\colon X \to Z_i, i = 1, 2,$ — неперервні сюр'єктивні відкриті відображення компактних гаусдорфових просторів. Кажемо, що f_1 еквівалентне f_2 (позначається $f_1 \sim f_2$), якщо існує гомеоморфізм $h\colon Z_1 \to Z_2$ такий, що $h \circ f_1 = f_2$. Очевидно, що $\sim$ — відношення еквівалентності на класі всіх неперервних сюр'єктивних відкритих відображень. Клас відношення $\sim$, що містить відображення f, позначаємо $\langle f\rangle$ і назвемо фактороб'єктом простору X.

Базисним околом елемента $\langle f\rangle$, в топології Вієторіса, є множина

$$O\langle f\rangle = \langle\langle U_{11}, U_{12}, \ldots, U_{1n_1}\rangle, \langle U_{21}, U_{22}, \ldots, U_{2n_2}\rangle, \ldots, \langle U_{k1}, U_{k2}, \ldots, U_{kn_k}\rangle\rangle,$$

де U_{ij} — відкриті підмножини простору X такі, що виконуються умови:

1) для кожного $z \in Z$ існує i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, такий, що $f^{-1}(z) \in \langle U_{i1}, U_{i2}, \ldots, U_{in_i}\rangle$, тобто $f^{-1}(z) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n_i} U_{ij}$ і для кожного $j \in \{1, 2, \ldots n_i\}$ маємо $f^{-1}(z) \cap U_{ij} \neq \varnothing$;

2) для кожного $i \in \{1, 2, \dots k\}$ знайдеться елемент $z \in Z$ такий, що $f^{-1}(z) \in \langle U_{i1}, U_{i2}, \dots, U_{in_i}\rangle$.

Одержаний топологічний простір відкритих факторооб'єктів простору X позначаємо $\Psi(X)$. Задамо збіжність у просторі $\Psi(X)$. Нехай задано послідовність відображень $f_i\colon X \to Z_i$, де $i \in \mathbb{N}$, і $f\colon X \to T$. Послідовність елементів $\{\langle f_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ топологічного простору $\Psi(X)$ збігається до елемента $\langle f\rangle \in \Psi(X)$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує номер $N \in \mathbb{N}$ такий, що для всіх $i \geqslant N$ має місце нерівність $d_{HH}(\langle f_i\rangle, \langle f\rangle) \leqslant \varepsilon$. Тобто, для кожного $z \in Z_i$ існує елемент $t \in T$ такий, що

$$d_H(f_i^{-1}(z), f^{-1}(t)) \leqslant \varepsilon,$$

і навпаки для кожного $t \in T$ існує елемент $z \in Z_i$ такий, що

$$d_H(f^{-1}(t), f_i^{-1}(z)) \leqslant \varepsilon.$$

Далі використовуватимемо цей опис збіжності при доведенні властивостей і тверджень.

Розбиттям простору X називається сім'я $\mathcal{A}$ диз'юнктних підмножин простору X, об'єднання яких є весь простір X.

Проекцією або фактор-відображенням множини X на розбиття $\mathcal{A}$ є функція f, значенням якої в точці x є єдиний елемент множини $\mathcal{A}$, який містить точку x.

Множина X називається *щільною*, якщо вона не містить ізольованих точок. Замкнену щільну множину називають *досконалою*.

Множина M називається *граничною*, якщо її доповнення є всюди щільною підмножиною простору X, тобто $\overline{X \setminus M} = X$.

Множина топологічного простору X називається *G_δ-множиною*, якщо вона є перетином зліченної кількості відкритих множин простору X.

Множина топологічного простору X називається *F_σ-множиною*, якщо вона є об'єднанням зліченної кількості замкнених підмножин простору X.

Доповненням до множини типу F_σ є множини типу G_δ, і навпаки.

Добре відома теорема Мазуркевича (див. [5, с. 453]):

Теорема 4. *Кожна G_δ множина щільна і гранична в повному сепарабельному нульвимірному просторі гомеоморфна просторові ірраціональних чисел.*

2 Простір відкритих факторовідображень простору S

Нехай $X = S = \{0\} \cup \{\frac{1}{i} \mid i \in \mathbb{N}\}$ — збіжна послідовність. Простір S є метричним, нульвимірним і компакним. Тоді гіперпростір другого порядку $\exp^2(S)$ теж є метричним, нульвимірним і компакним, як наслідок з теорем 1 і 2.

Розглянемо простір $\Psi(S)$. Згідно побудови $\Psi(S) \subset \exp^2(S)$, отже, простір $\Psi(S)$ нульвимірний.

Нехай $f_n\colon S \to f_n(S)$, де $f_n(S) = \{y_1, y_2, \dots y_n\}$ — дискретний простір, для всіх $n \in \mathbb{N}$. Визначимо відображення f_n формулою:

$$f_n(x) = \begin{cases} y_i, \text{ якщо } x \in M_n = \{\frac{1}{2i} \mid i \leqslant n\}; \\ 0, \text{ якщо } x \in S \setminus M_n. \end{cases}$$

Нехай $f\colon S \to f(S)$, де $f(S) = \{s_0, s_1, s_2, \dots\}$ — збіжна послідовність з граничною точкою s_0. Відображення f задаємо наступним чином:

$$f(x) = \begin{cases} s_i, \text{ якщо } x \in M = \{\frac{1}{2i} | i \in \mathbb{N}\}; \\ s_0, \text{ якщо } x \in S \setminus M. \end{cases}$$

Тоді $f_n\colon S \to f_n(S)$ — відкрите, сюр'єктивне неперервне відображення, для кожного $n \in \mathbb{N}$. Кожне відображення f_n, де $n \in \mathbb{N}$, визначає деякий факторооб'єкт простору S. Розглянемо відповідну послідовність $\langle f_n\rangle$ елементів простору $\Psi(S)$. Доведемо, що границею послідовності $\{\langle f_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$, при $n \to \infty$, в просторі $\exp^2(S)$ є клас $\langle f\rangle$, визначений відображенням $f\colon S \to f(S)$.

Розглянемо відстань

$$d_{HH}(\langle f_n\rangle, \langle f\rangle) = d_H(\{f_n^{-1}(f_n(x)) \mid x \in S\}, \{f^{-1}(f(x)) \mid x \in S\}).$$

Можливі такі випадки:

1) якщо $x = \frac{1}{2i+1}$, то

$$d_H\left(f_n^{-1}\left(f_n\left(\frac{1}{2i+1}\right)\right), f^{-1}\left(f\left(\frac{1}{2i+1}\right)\right)\right) = d_H(S \setminus M_n, S \setminus M)$$
$$= d_H\left(S \setminus \left\{\frac{1}{2i} \mid 1 \leqslant i \leqslant n\right\}, S \setminus \left\{\frac{1}{2i} \mid i \in \mathbb{N}\right\}\right) \leqslant \frac{1}{2n};$$

2) якщо $x = \frac{1}{2i}$, то

$$d_H\left(f_n^{-1}\left(f_n\left(\frac{1}{2i}\right)\right), f^{-1}\left(f\left(\frac{1}{2i}\right)\right)\right) = \begin{cases} \left|\frac{1}{2n} - \frac{1}{2i}\right|, \text{ якщо } n < i \\ 0, \text{ якщо } n \geqslant i. \end{cases}$$

Таким чином $d_{HH}(\langle f_n\rangle, \langle f\rangle) \leqslant \frac{1}{2n}$. Отже, послідовність $\{\langle f_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до елемента $\langle f\rangle$.

З іншого боку

$$\langle f_n\rangle = \{f_n^{-1}(f_n(s)) \mid s \in S\} = \left\{\left\{\frac{1}{2}\right\}, \dots, \left\{\frac{1}{2n}\right\}, S \setminus \left\{\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2n}\right\}\right\} = \mathcal{F}_n.$$

Очевидно послідовність $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до

$$\mathcal{F} = \left\{\left\{\frac{1}{2n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right\} \cup \{\{0\}\} \cup \left\{S \setminus \left\{\frac{1}{2n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right\}.$$

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ згідно вибору елементів $\langle f_i\rangle$ виконується $\{0\} \in S \setminus \left\{\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2n}\right\}$, отже, в границі $\{0\} \in \left\{S \setminus \left\{\frac{1}{2n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right\}$, тобто $\mathcal{F}$ не є елементом множини $\Psi(S)$. Це показує некомпактність множини $\Psi(S)$.

Приймемо $\Psi_1 = \{\langle f\rangle \in \Psi(S) \mid |f(S)| < \infty\}$ і $\Psi_2 = \{\langle f\rangle \in \Psi(S) \mid |f(S)| = \infty\}$. Тоді $\Psi(S) = \Psi_1(S) \cup \Psi_2(S)$.

Лема 2.1. *Нехай $\langle f\rangle \in \Psi(S)$. Тоді еквівалентними є такі умови:*

1) $\langle f\rangle \in \Psi_2(S)$,

2) існує таке розбиття $S\setminus\{0\} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, де $|A_i| < \infty$, що

$$\{f^{-1}(f(x)) \mid x\in S\} = \langle f\rangle = \{\{0\}\}\cup\{A_i \mid i\in\mathbb{N}\}.$$

Доведення. 1) Нехай $\langle f\rangle \in \Psi_2(S)$, тоді $\{f^{-1}(f(x)) \mid x\in S\}$ є нескінченною, диз'юнктною сім'єю підмножин в S. Покажемо, що $f^{-1}(f(0)) = \{0\}$. Справді, $f(0)$ — не ізольована точка. Якщо би $f(s) = f(0)$ для деякого $s\neq 0$, то $f(\{s\}) = \{f(0)\}$ не була би відкритою множиною, що суперечить відкритості відображення f.

Далі приймемо $\{A_i \mid i\in\mathbb{N}\} = \{f^{-1}(f(s)) \mid s\in S\setminus\{0\}\}$.

2) Нехай $S = \{0\}\cup A_i$, де $1\leqslant |A_i|\leqslant\infty$ і $A_i\cap A_j = \varnothing$ при $i\neq j$.

Розглянемо множину $Y = \{y\}\cup\{y_i \mid i\in\mathbb{N}\}$ і означимо відображення $f\colon S\longrightarrow Y$ формулою

$$f(x) = \begin{cases} y_i, & \text{якщо } x\in A_i;\\ y, & \text{якщо } x = 0.\end{cases}$$

Наділимо Y фактортопологією, породженою відображенням f. Тоді, очевидно, Y гомеоморфний збіжній послідовності.

Покажемо, що відображення f відкрите. Покладемо O — відкрита підмножина простору S. Тоді:

1) Якщо $0\in S\setminus O$, то $f(O)\subset Y\setminus\{y\}$ — відкрита множина;

2) Якщо $0\in O$, тоді $S\setminus O$ — скінченна множина і

$$f(O) = \{y\}\cup\{y_i \mid A_i\cap O\neq\varnothing\} = Y\setminus\{y_i \mid A_i\cap O = \varnothing\}$$

— відкрите, як доповнення до скінченної множини. □

Твердження 2.1. *Підмножина Ψ_1 всюди щільна в просторі $\Psi(S)$.*

Доведення. Нехай $\langle f\rangle\in\Psi_2$, за лемою 1 $f\colon S\to X$ — неперервне відкрите відображення послідовності S на компактний гаусдорфовий простір X, де $|X| = \infty$. Тоді

$$\{f^{-1}(x) \mid x\in X\} = S = \{0\}\sqcup\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

де A_n — замкнені підмножини в S, для кожного $n\in\mathbb{N}$. Оскільки S — збіжна послідовність, то при достатньо великих значеннях індекса $n\in\mathbb{N}$ маємо $\operatorname{diam}(A_n)\to 0$ і $d_H(A_n, A_{n+1})\to 0$. Нехай

$$O_\varepsilon(\langle f\rangle) = \{\langle g\rangle\in\Psi(X) \mid d_{HH}(\langle f\rangle,\langle g\rangle) < \varepsilon \text{ де } \varepsilon > 0\}.$$

Покладемо $X_k = \{0,1,2,\ldots,k\}$ — дискретний простір. Означимо послідовність відображень $g_k\colon S\to X_k$ наступним чином

$$g_k(x) = \begin{cases} i, & \text{якщо } x\in A_i \text{ де } 1\leqslant i\leqslant k;\\ 0, & \text{якщо } x\in S\setminus\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k}\{A_i\}\right).\end{cases}$$

Знайдеться номер $k_0\in\mathbb{N}$ такий, що $\operatorname{diam}(A_{k_0}) < \operatorname{diam}(g_{k_0}^{-1}(0)) < \varepsilon$.

Нехай $x\in S\setminus\{0\}$. Знайдеться $A_i\subset S$ така, що $x\in A_i$. Якщо $i<k$, де $k>k_0$, тоді $f^{-1}(f(x)) = g_k^{-1}(i) = A_i$, отже, $d_H(f^{-1}(f(x)), g_k^{-1}(g_k(x))) = 0$. Якщо $i>k_0$, то має місце $A_{k_0}\subset g_{k_0}^{-1}(0)$, отже, $d_H(f^{-1}(f(x)), g_k^{-1}(0)) < \operatorname{diam} g_{k_0}^{-1}(0) < \varepsilon$.

Таким чином, для кожного $\varepsilon>0$ знайдеться номер $k_0\in\mathbb{N}$ такий, що справджується нерівність $d_H(f^{-1}(f(x)), g_k^{-1}(0)) < \varepsilon$, тобто, всі елементи послідовності $\{\langle g_k\rangle\}_{i=1}^{\infty}\in\Psi_1$ починаючи з номера $k_0\in\mathbb{N}$ містяться в ε-околі елемента $\langle f\rangle\in\Psi_2$. Отже, множина Ψ_1 всюди щільна в просторі $\Psi(S)$. □

Твердження 2.2. *Підмножина Ψ_2 є досконалою підмножиною простору $\Psi(S)$.*

Доведення. Нехай $\langle f\rangle\in\Psi_2$, за лемою 1 $f\colon S\to X$ — неперервне відкрите відображення послідовності S на компактний гаусдорфовий простір X, де $|X| = \infty$. Тоді

$$\{f^{-1}(x) \mid x\in X\} = S = \{0\}\sqcup\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

де A_n — замкнені підмножини в S, для кожного $n\in\mathbb{N}$.

Розглянемо послідовність $\{\langle g_j\rangle \mid \langle g_j\rangle\in\Psi_2(S), j\in\mathbb{N}\}$. Визначимо відображення $g_j\colon S\to Y_j$ наступним чином

$$g_j(s) = \begin{cases} y_i, & \text{якщо } s\in A_i, \text{ де } i<j;\\ y_j, & \text{якщо } s\in A_j\sqcup A_{j+1};\\ y_k, & \text{якщо } s\in A_{k+1}, \text{ де } k<j+1;\\ 0, & \text{якщо } s=0.\end{cases}$$

Розглянемо відстань

$$\begin{aligned} d_{HH}(\langle g_j\rangle,\langle f\rangle) &= d_H(\{g_j^{-1}(y_i) \mid y_i\in Y_j\}, \{f^{-1}(x) \mid x\in X\}) = \\ &= \min\{d_H(A_j, A_j\sqcup A_{j+1}), d_H(A_{j+1}, A_j\sqcup A_{j+1})\} \leqslant \operatorname{diam}(A_j\sqcup A_{j+1}).\end{aligned}$$

Отже, для кожного $\varepsilon>0$ знайдеться номер $N_0\in\mathbb{N}$ такий, що $\operatorname{diam}(A_j) < \varepsilon/3$ і $d_H(A_j, A_{j+1}) < \varepsilon/3$, для всіх $j>N_0$. Тоді

$$d_{HH}(\langle g_n\rangle,\langle f\rangle) \leqslant \operatorname{diam}(A_j\sqcup A_{j+1}) < \varepsilon \text{ для всіх } j>N_0,$$

тобто, послідовність $\{\langle g_j\rangle\}_{j=1}^{\infty}$, де $\langle g_j\rangle\in\Psi_2(S)$, збігається до елемента $\langle f\rangle\in\Psi_2$, що доводить досконалість множини $\Psi_2(S)$. □

3 Топологічний тип простору $\Psi(X)$

Нехай X — метричний компакт. Позначимо через $\mathbb{D}$ множину диз'юнктних сімей замкнених підмножин простору X, що покривають весь X, тоді

$$\mathbb{D} = \{\mathcal{A}\in\exp^2 X \mid X = \bigsqcup_{A\in\mathcal{A}} A\}.$$

Лема 3.1. *Множина $\mathbb{D}$ є множиною типу G_δ в $\exp^2(X)$.*

Доведення. Нехай $j \in \mathbb{N}$. Приймемо $\mathbb{C} = \{\mathcal{A} \in \exp^2 X \mid \cup\mathcal{A} = X\}$ — множина сімей замкнених підмножин простору X, які покривають весь X і

$$\mathbb{F}_j = \left\{\mathcal{A} \in \exp^2 X \mid \text{ існують } A, B \in \mathcal{A} \text{ такі, що } A \cap B \neq \varnothing \text{ і } d_H(A,B) \geqslant \frac{1}{j}\right\}.$$

Тоді $\mathbb{D} = \mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \mathbb{F}_j$. Оскільки відображення об'єднання $\bigcup\colon \exp^2 X \longrightarrow \exp X$ неперервне (див. [2]), одержуємо, що множина $\mathbb{C}$ замкнена в $\exp^2 X$.

Покажемо, що кожна множина $\mathbb{F}_j$, $j \in \mathbb{N}$, замкнена в $\exp^2 X$. Справді, розглянемо послідовність $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^{\infty}$ елементів множини $\mathbb{F}_j$, яка збігається до деякого елемента $\mathcal{A}$, переконаємося, що $\mathcal{A} \in \mathbb{F}_j$. Отже, $\mathcal{A}_i \in \mathbb{F}_j$, для кожного $i \in \mathbb{N}$. Тоді, для всіх $i \in \mathbb{N}$, існують $A_i, B_i \in \mathcal{A}_i$ такі, що $A_i \cap B_i \neq \varnothing$ і $d_H(A_i, B_i) \geqslant \frac{1}{j}$. Із збіжності послідовності $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^{\infty}$ до $\mathcal{A}$ випливає існування елементів $A, B \in \mathcal{A}$ таких, що послідовності $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ і $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ збігються до елементів A і B.

Нехай послідовності $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ і $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ збігаються до елементів A і B, відповідно. Тоді $d_H(A_i, A) \longrightarrow 0$ і $d_H(B_i, B) \longrightarrow 0$ при $i \longrightarrow \infty$. Оскільки

$$\frac{1}{j} \leqslant d_H(A_i, B_i) \leqslant d_H(A_i, A) + d_H(A, B) + d_H(B, B_i),$$

то при $i \longrightarrow \infty$ отримаємо $\frac{1}{j} \leqslant d_H(A, B)$.

Отже, $\mathcal{A} \in \mathbb{F}_j$, що доводить замкненість множини $\mathbb{F}_j$, $j \in \mathbb{N}$ в просторі $\exp^2 X$. Тоді множина $\mathbb{D}$ є доповненням до множини типу F_σ, а, отже, є G_δ-множиною. □

Метричний простір X називається *ніде не локально компактним*, якщо для кожного $x \in X$ існує $r > 0$ таке, що для всіх $s < r$ множина $\overline{O_s(x)}$ не є компактною.

Твердження 3.1. *Простір $\Psi_2(X)$ ніде не локально компактний.*

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$ і $\langle f \rangle \in \Psi_2(X)$. Покажемо, що множина $\overline{O_\varepsilon(\langle f \rangle)}$ некомпактна. Розглянемо елемент $\langle f \rangle \in \Psi_2(X)$, тоді

$$\{f^{-1}(f(x)) \mid x \in X\} = \langle f \rangle = A_0 \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Відповідне відображення $f\colon X \longrightarrow f(X)$ задається формулою $f(x) = a_1$, якщо $x \in A_i$ при $i = 0, 1, 2 \ldots$ Оскільки X — метричний компакт, то $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$ і $d_H(A_n, A_{n+1}) \to 0$, при достатньо великих значеннях $n \in \mathbb{N}$.

Розглянемо замикання ε-околу елемента $\langle f \rangle$

$$\overline{O_\varepsilon(\langle f \rangle)} = \{\langle g \rangle \in \Psi_2(X) \mid d_{HH}(\langle f \rangle, \langle g \rangle) \leqslant \varepsilon\}.$$

Для вибраного $\varepsilon > 0$ існує номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такий, що $\operatorname{diam}(A_n) < \varepsilon$ і $d_H(A_n, A_{n+1}) < \varepsilon$ для всіх $n > n_0$.

Розглянемо послідовність елементів $\langle f_i \rangle$, простору $\Psi_2(X)$, де $i \in \mathbb{N}$ і відображення $f_i\colon X \longrightarrow f_i(X)$ визначається формулою

$$f_i(x) = \begin{cases} y_j, \text{ якщо } x \in A_j \text{ при } j \in \{\mathbb{N} \cup \{0\}\} \setminus \{n_0, n_0+1, n_0+1+i, n_0+2+i\}; \\ y_{n_0}, \text{ якщо } x \in A_{n_0} \sqcup A_{n_0+1+i}; \\ y_{n_0+1}, \text{ якщо } x \in A_{n_0+1} \sqcup A_{n_0+2+i}. \end{cases}$$

Таким чином, $f_i(X) = \{y_i \mid i \in (\{0\} \cup \mathbb{N}) \setminus \{n_0+1+i, n_0+2+i\}\}$. Простір $f_i(X)$, очевидно, гомеоморфний збіжній послідовності з неізольованою точкою y_0. Тоді $\langle f_i \rangle \in \overline{O_\varepsilon(\langle f \rangle)}$ для всіх $i \in \mathbb{N}$. Справді, розглянемо відстань

$$d_{HH}(\langle f_i \rangle, \langle f \rangle) = d_H(\{f_i^{-1}(f_i(x)) \mid x \in X\}, \{f^{-1}(f(x)) \mid x \in X\}) \leqslant$$
$$\leqslant d_H(A_{n_0} \sqcup A_{n_0+1+i}, A_{n_0+1} \sqcup A_{n_0+2+i}) \leqslant \max\{d_H(A_{n_0}, A_{n_0+1}), d_H(A_{n_0+1+i}, A_{n_0+2+i})\} < \varepsilon.$$

Послідовність $\{\langle f_i \rangle\}_{i=1}^{\infty}$ в просторі $\exp^2 X$ збігається до елемнта

$$\widetilde{\langle f \rangle} = \{0\} \cup \{A_i \mid i \in \mathbb{N} \setminus \{n_0+1+i, n_0+2+i\}\} \cup \{A_{n_0} \cup \{0\}, A_{n_0+1} \cup \{0\}\}.$$

Оскільки ця сім'я не дизюнктна, то вона не належить $\Psi(X)$. Отже, в ε-околі елемента $\langle f \rangle \in \Psi_2(X)$ існує послідовність $\{\langle f_i \rangle\}_{i=1}^{\infty}$, границя якої не належить замиканню $\overline{O_\varepsilon(\langle f \rangle)}$. Отже, простір $\Psi_2(X)$ ніде не локально компактний.

За характеризаційною теоремою 3 для множини ірраціональних чисел одержуємо, що $\Psi_2(S) \cong \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. □

4 Висновки

Відкритою залишається проблема опису топології простору $\Psi(X)$ для інших метризовних нульвимірних просторів. Сформулюємо гіпотезу: для досконалої канторової множини C простір $\Psi(C)$ гомеоморфний просторові ірраціональних чисел. Природною є також задача про перенесення одержаних результатів на неметризовний випадок, зокрема, на випадок, коли X є суперпослідовністю ваги τ (одноточковою компактифікацією дискретного простору потужності τ).

Література

1. Выборнов А.Н. *Пространства компактных подмножеств нульмерных польских пространств с всюду плотным множеством изолированых точек* // Успехи мат. наук. — 1984. — Т. 39, Вып. 4(238). — С. 153–154.
2. Зарічний М.М. Топологія функторів і монад у категорії компактів. — К.: ІСДО, 1993. — 108 с.
3. Копорх К. *Топології на множині фактороб'єктів компактного гаусдорфового простору* // Праці міжнародного геометричного центру. — 2010. — Т.3. №3. — С. 40–47.
4. Копорх К. *Топологія Вієторіса на просторі відкритих фактороб'єктів компактного гаусдорфового простору* // Праці міжнародного геометричного центру. — 2010. — Том 3, №4. — С. 35–42.
5. Куратовський К. Топология. Т.1. — М.: Мир, 1969. — 332 с.

6. Федорчук В.В. Общая топология. Основные конструкции. — М.: МГУ, 1988. — 252 с.

7. Reiter A., Reiter H. *The Space of Closed Subsets of a Convergent Seqence.* Math. Mag., **69**, 3 (1996), 217–221.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника.
Івано-Франківськ, Україна
e-mail: *katerynka.k@gmail.com*

Надійшло 02.03.2012

Koporkh K.M. *On space of open quotient maps of a convergent sequence*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 58–66.

We consider the space of the classes of equivalences of continuous open maps defined on a convergent sequence induced by the Hausdorff metric. We show that $\Psi(S)$ is a perfect zero-dimensional noncompact metric space which can be decomposed into the union of two sets, one of which is dense and the other is homeomorphic to the set of irrational numbers.

Копорх К.М. *Пространство открытых факторотображений сходящейся последовательности* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 58–66.

Рассматривается пространство классов эквивалентности открытых отображений последовательности в топологии, индуцированной метрикой Хаусдорфа. Пространство открытых факторотображений последовательности можно рассматривать как объединение двух подмножеств, одно из которых всюду плотно в пространстве открытых факторотображений, а второе гомеоморфное множеству иррациональных чисел.

УДК 517.982

Красікова І.В.[1], Попов М.М.[2]

ЗАМІТКА ПРО ОПЕРАТОРИ З ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПРОСТОРІВ КЕТЕ У ПРОСТІР $C_0(\Gamma)$

Красікова І.В., Попов М.М. *Замітка про оператори з функціональних просторів Кете у простір* $c_0(\Gamma)$ // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — С. 67–71.

Метою замітки є узагальнення відомого результату про вузькість будь-якого оператора з простору $E = L_p$ в c_0 при $1 \le p < \infty$ на випадок загальнішого класу просторів Кете E.

Вступ

Поняття вузького оператора, як узагальнення компактного оператора, введено в роботі [7] у 1990 р. В цій же роботі проведено перше систематичне дослідження вузьких операторів. Проте, окремі результати про вузькі оператори були відомі раніше. Наприклад, як допоміжний результат, у статті Дж. Бургейна і Х. Розенталя [1] отримано, що кожний оператор з L_1 в c_0 вузький. В статті В. Кадецем і М. Поповим [2] доведено, що кожний оператор з простору L_p в c_0 є вузьким при довільному $p \in [1, +\infty)$. У роботі [4] автори встановили, що кожний порядково-нормовано неперервний оператор $T : L_\infty(\mu) \to c_0(\Gamma)$ вузький. Із сучасним станом теорії вузьких операторів можна ознайомитися у недавньому огляді [8].

1 Вузькість операторів з просторів Кете у простір $c_0(\Gamma)$

Наведемо необхідну інформацію. F-простором називається повний метричний лінійний простір з інваріантною відносно зсуву метрикою (детальніше про F-простори див. у [9]). Множину всіх лінійних неперервних операторів $T : X \to Y$ між F-просторами X, Y позначатимемо через $\mathcal{L}(X, Y)$. Термінологія та загальновідомі факти про банахові простори запозичені з двотомника [5, 6]. Так, якщо X — банахів простір, то через B_X ми позначаємо одиничну кулю простору X.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 46B20, 46E30.
Ключові слова і фрази: простір Кете, вузький оператор, корозмірність підпростору, слабко компактна множина, крайова точка множини.

Означення 1.1. *Нехай (Ω, Σ, μ) — простір зі скінченною безатомною додатною мірою. Позначимо через $L_0(\mu)$ лінійний простір всіх класів еквівалентності вимірних функцій $x : \Omega \to \mathbb{K}$ (де $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$). F-простір (банахів простір) $E \subseteq L_0(\mu)$ називається F-простором Кете (банаховим простором Кете), якщо виконуються такі умови:*

(*i*) *для довільних $x \in L_0(\mu)$ та $y \in E$ з умови $|x(\omega)| \le |y(\omega)|$ для майже всіх $\omega \in \Omega$ випливає, що $x \in E$ і $\|x\| \le \|y\|$;*

(*ii*) $\mathbf{1}_\Omega \in E$.

Тут і надалі $\mathbf{1}_A$ — характеристична функція множини $A \in \Sigma$.

Означення 1.2. *Нехай E — F-простір Кете на (Ω, Σ, μ) і X — довільний F-простір. Оператор $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ називається вузьким, якщо для довільних $A \in \Sigma$ та $\varepsilon > 0$ існує така функція $x \in L_0(\mu)$, що*

$$x^2 = \mathbf{1}_A, \quad \int_\Omega x\, d\mu = 0 \quad \text{та} \quad \|Tx\| < \varepsilon.$$

Основний результат цієї замітки — наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай (Ω, Σ, μ) — простір зі скінченною безатомною додатною мірою, E — дійсний F-простір Кете на (Ω, Σ, μ), для якого існує рефлексивний банахів простір Кете E_1 на (Ω, Σ, μ) з неперервним вкладенням $E_1 \subseteq E$, Γ — довільна множина. Тоді кожний оператор $T \in \mathcal{L}(E, c_0(\Gamma))$ є вузьким.*

Для доведення теореми потрібні допоміжні елементарні факти (ці факти використовувалися в [4]). Оскільки доведення займають мало місця, ми наведемо їх для повноти.

Нагадаємо, що корозмірністю підпростору Y лінійного простору X називається розмірність (тобто потужність базису Гамеля) фактор-простору X/Y. Записують це так: $\operatorname{codim} Y = \dim X/Y$.

Лема 1.1. *Нехай $S : X \to Y$ — лінійний оператор, що діє між лінійними просторами. Якщо лінійний підпростір $Y_0 \subseteq Y$ має скінченну корозмірність у Y, тоді $X_0 = T^{-1}Y_0$ має скінченну корозмірність у просторі X.*

Доведення. Нехай $m = \dim Y/Y_0$ та $x_1, x_2, ..., x_{m+1}$ — довільні елементи простору X. Згідно з означенням числа m, існують такі скаляри $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{m+1}$, які не всі одночасно дорівнюють нулю, що $\alpha_1 Tx_1 + \alpha_2 Tx_2 + ... + \alpha_{m+1} Tx_{m+1} \in Y_0$. Але оскільки

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_{m+1} x_{m+1} \in X_0,$$

за рахунок довільності вибору $x_1, x_2, ..., x_{m+1} \in X_0$, ми отримаємо, що $\dim X/X_0 \le m$, тобто підпростір X_0 має скінченну корозмірність у просторі X. □

Лема 1.2. *Нехай X — лінійний простір, а Y, Z — його підпростори. Якщо $\dim Y > \operatorname{codim} Z$, то $Y \bigcap Z \ne \{0\}$.*

Доведення. Нехай $\tau : X \to X/Z$ — фактор-відображення, а $\tau|_Y : Y \to X/Z$ — його звуження на підпростір Y. Оскільки $\dim Y > \dim X/Z$, то існує такий $y \in Y \backslash \{0\}$, для якого $\tau y = 0$. Це в свою чергу означає, що $y \in Y \bigcap Z \backslash \{0\}$. □

Доведення теореми 1. Очевидно, достатньо довести, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий елемент $x \in E$, що

$$|x| = \mathbf{1}_\Omega, \quad \int_\Omega x\, d\mu = 0 \quad \text{та} \quad \|Tx\| < \varepsilon.$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ та розглянемо множину

$$K = \left\{x \in B_{L_\infty(\mu)} : \int_\Omega x\, d\lambda = 0, \|Tx\| \le \varepsilon\right\}.$$

Зазначимо, що K — непорожня опукла обмежена замкнена підмножина простору E. З означення простору Кете випливає, що множина K обмежена також в E_1, а за рахунок неперервності вкладення $E_1 \subseteq E$ отримуємо, що K замкнена в E_1. Отже, за теоремою Банаха-Алаоглу, множина K є опуклою слабко компактною підмножиною простору E_1. За теоремою Крейна-Мільмана, існує принаймні одна крайня точка $x_0 \in K$. Доведемо, що саме ця функція x_0 є такою, існування якої стверджується в теоремі. Для цього достатньо показати, що $|x_0(t)| = 1$ майже скрізь на Ω.

Припустимо, що це не так, тобто існує таке число $\delta > 0$ і така множина $A \in \Sigma$, $\mu(A) > 0$, що $|x_0(t)| \le 1 - \delta$ для всіх $t \in A$. Нехай $Tx_0 = \sum\limits_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma e_\gamma$, де $(a_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ — числова напрямленість, для якої $\lim\limits_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma = 0$, а $(e_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ — стандартний базис у просторі $c_0(\Gamma)$ з біортогональними функціоналами $(e_\gamma^*)_{\gamma\in\Gamma}$. Виберемо скінченну підмножину $\Gamma_0 \subset \Gamma$, таку, що $|a_\gamma| < \varepsilon/2$ для кожного $\gamma \in \Gamma\backslash\Gamma_0$. За лемою 1.1, підпростір $T^{-1}([e_\gamma]_{\gamma\in\Gamma\backslash\Gamma_0})$ має скінченну корозмірність у просторі E. Оскільки перетин двох підпросторів скінченної корозмірності є підпростором скінченної корозмірності, отримаємо, що підпростір

$$X = T^{-1}\Big([e_\gamma]_{\gamma\in\Gamma\backslash\Gamma_0}\Big) \bigcap \left\{x \in E : \int_\Omega x\, d\mu = 0\right\}$$

має скінченну корозмірність у просторі E. З леми 2.1 випливає, що $L_\infty(A) \bigcap X \ne \{0\}$. Виберемо довільний елемент $x \in L_\infty(A) \bigcap X$, $x \ne 0$, для якого $\|x\|_\infty \le \delta$ та $\|Tx\| \le \varepsilon/2$. З того, що $x \in X$ та $x_0 \in K$ випливає, що $\int_\Omega (x_0 \pm x)\, d\lambda = 0$. Із припущення $|x_0(t)| < 1 - \delta$ для всіх $t \in A$, $x \in L_\infty(A)$ та $\|x\|_\infty \le \delta$, випливає, що $(x_0 \pm x) \in B_{L_\infty(\mu)}$. Зауважимо, що якщо $\gamma \in \Gamma_0$, то

$$\left|e_\gamma^*(Tx_0 \pm x)\right| = |a_\gamma| \le \varepsilon.$$

а якщо $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_0$, то

$$\left|e_\gamma^*(Tx_0 \pm x)\right| \le |a_\gamma| + |e_\gamma^*(Tx)| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким чином, справджується нерівність $\|T(x_0 \pm x)\| \le \varepsilon$, а, отже, $(x_0 \pm x) \in K$. Це суперечить тому, що точка x_0 є крайньою для множини K. Отримана суперечність завершує доведення теореми. □

Далі ми наведемо наслідок теореми 1 для класу нелокально опуклих просторів Кете. Кажуть, що F-простір Кете E на безатомному скінченному просторі з мірою (Ω, Σ, μ) *має властивість* (q), якщо

$$\lim_{\mu(A)\to 0}\left\|\frac{\mathbf{1}_A}{\mu(A)}\right\| = 0.$$

Наприклад, класичні F-простори $L_p(\mu)$ при $0 < p < 1$ мають цю властивість (в цьому легко переконатися безпосередньо). Відомо, що якщо простір Кете E має властивість (q), то $E^* = \{0\}$ [9, p. 194], а також, що єдиний вузький оператор з E у довільний F-простір X — це 0 [7]. Таким чином, отримуємо наступний наслідок.

Наслідок. *Нехай* (Ω, Σ, μ) *— простір зі скінченною безатомною додатною мірою,* E *— дійсний* F*-простір Кете на* (Ω, Σ, μ) *з властивістю* (q)*, для якого існує рефлексивний банахів простір Кете* E_1 *на* (Ω, Σ, μ) *з неперервним вкладенням* $E_1 \subseteq E$, Γ *- довільна множина. Тоді* $\mathcal{L}(E, c_0(\Gamma)) = \{0\}$.

Зазначимо, що наслідок 1 не цікавий саме для просторів $L_p(\mu)$ при $0 < p < 1$, оскільки, згідно з результатом Калтона [3], має місце сильніший результат: кожний ненульовий оператор з $L_p(\mu)$ при $0 < p < 1$ у довільний топологічний векторний простір є ізоморфним вкладенням при звуженні на деякий підпростір, ізоморфний ℓ_2.

ЛІТЕРАТУРА

1. Bourgain J., Rosenthal H. P. *Applications of the theory of semi-embeddings to Banach space theory*, J. Funct. Anal., **52**, 2 (1983), 149–188.
2. Kadets V. M., Popov M. M. *On the Liapunov convexity theorem with applications to sign-embeddings*, Ukr. Math. J., **44**, 9 (1992), 1192–1200.
3. Kalton N. J. *Compact and strictly singular operators in Orlicz spaces*, Isr. J. Math., **26**, (1977), 126–136.
4. Krasikova I., Martín M., Merí J., Mykhaylyuk V., Popov M. *On order structure and operators in* $L_\infty(\mu)$, Cent. Eur. J. Math., **7**, 4 (2009), 683–693.
5. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. I, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1977.
6. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. II, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1979.

7. Plichko A. M., Popov M. M. *Symmetric function spaces on atomless probability spaces*, Diss. Math. (Rozpr. mat.) (1990), 306 p. – P. 1–85.
8. Popov M. M. *Narrow operators (a survey)*, Function Spaces IX, Banach Center Publ. Inst. Math Polish Acad. Sci., Warszawa, **92**, (2011), 299–326.
9. Rolewicz S. Metric linear spaces, Warszawa, PWN, 1985.

[1] Запорізький національний університет,
Запоріжжя, Україна
e-mail: *yudp@mail.ru*

[2] Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна
e-mail: *misham.popov@gmail.com*

Надійшло 21.03.2012

Krasikova I.V., Popov M.M. *A note on operators from Köthe function spaces to* $c_0(\Gamma)$, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 67–71.

It is well known that every operator from $E = L_p$, $1 \le p < \infty$ to c_0 is narrow. We show that this result can be extended to a more general class of Köthe function spaces E.

Красикова И.В., Попов М.М. *Заметка об операторах из функциональных пространств Кёте в пространство* $c_0(\Gamma)$ // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 67–71.

Целью данной статьи является обобщение известного результата о том, что каждый оператор из пространства $E = L_p$ в c_0 при $1 \le p < \infty$ является узким, на случай более общего класса пространств Кёте.

Карпатські математичні публікації. Т.4, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №1

УДК 517.95

Лопушанський А.О.[1], Лопушанська Г.П.[2], Пасічник О.В.[2]

ДВА ФОРМУЛЮВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ПІВЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ ЗА ЧАСОМ

Лопушанський А.О., Лопушанська Г.П., Пасічник О.В. *Два формулювання узагальненої задачі Коші для півлінійного рівняння дифузії з дробовою похідною за часом* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4. №1. — С. 72–82.

Запропоновано два еквівалентні формулювання задачі Коші для півлінійного рівняння дробового порядку $\alpha \in (0;1)$ за часом з узагальненою функцією в початковій умові. Доведено теорему існування та єдиності, отримано зображення розв'язку такої задачі для лінійного однорідного рівняння з дробовою похідною за часом.

Вступ

Задачі для рівнянь з дробовими похідними за часом (див., наприклад, [7], [16], [17]) зустрічаються при описі процесів, які протікають у пористих (фрактальних) середовищах. У праці [7] встановлено умови існування класичного розв'язку задачі Коші для однорідного рівняння субдифузії. Актуальним є дослідження задач для рівнянь з дробовими похідними у просторах узагальнених функцій (наприклад, [4], [9]). Як і при дослідженні рівнянь з частинними похідними [3]–[6], [12], [8], [10], важливо виділити умови існування регулярних в області розв'язків, що набувають узагальнених значень на межі. Звідси можливі різні трактування узагальненого розв'язку задачі Коші.

У роботі запропоновано два еквівалентні формулювання задачі Коші для півлінійного рівняння дифузії з узагальненою функцією в початковій умові. Одне з формулювань ґрунтується на формулі Ґріна, у другому формулюванні рівняння та початкова умова розділені. Друге формулювання використовують для знаходження регулярних при $t > 0$ розв'язків. У випадку лінійних рівнянь з частинними похідними доведено, що регулярні в області розв'язки крайових задач із заданими на межі узагальненими функціями належать до вагових просторів з вагами порядків степенів відстані від точки

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K55.

Ключові слова і фрази: півлінійне рівняння, узагальнена функція, ваговий функційний простір, згортка, похідна дробового порядку.

області до межі (степінь залежить від характеру сингулярностей узагальнених крайових значень таких розв'язків). Тому у випадку півлінійних рівнянь природно шукати розв'язки з таких вагових просторів [8]–[14].

1 Основні позначення, означення та допоміжні твердження

Нехай $Q_T = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}, t \in (0,T]\}$; $L_{1,loc}(Q_T)$ — простір функцій, інтегровних у кожній обмеженій області, що розміщена строго всередині Q_T; $D(Q_T) := C_0^\infty(Q_T)$, $D(\mathbb{R}^n) := C_0^\infty(\mathbb{R}^n), n = 1,2$; $D(\bar{Q}_T) := C_0^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T) = \{\varphi \in C_0^\infty(\bar{Q}_T) : D_t^l\varphi\,|_{t=T} = 0,\ l = 0,1,2,\dots\}$ — простір нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями в Q_τ, $\tau < T$; $D'(\mathbb{R})$, $D'(Q_T)$ — простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) на просторах $D(\mathbb{R})$, $D(Q_T)$ відповідно ([2], [15]); $D'(\bar{Q}_T)$ — сукупність узагальнених функцій f із $D'(\mathbb{R}^2)$ з носіями $\mathrm{supp} f$ в $\bar{Q}_T$ із збіжністю: $f_m \to 0$, $m \to +\infty$ в $D'(\bar{Q}_T)$, якщо $f_m \to 0$, $m \to +\infty$ в $D'(\mathbb{R}^2)$ і $\mathrm{supp} f_m \subset \bar{Q}_T$ ([2, с. 27]); (f,φ) — значення узагальненої функції $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ на основній функції $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, $n = 1,2$.

Зауважимо, що узагальнені функції $f \in D'(\bar{Q}_T)$ є лінійними неперервними функціоналами на $D(\bar{Q}_T)$. Також лінійний неперервний функціонал f на $D(\bar{Q}_T)$ можна трактувати як узагальнену функцію $\tilde{f}$ з $D'(\mathbb{R}^2)$, визначивши $(\tilde{f},\varphi) = (f, h\varphi)$ для кожної $\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$, де $h \in D(\mathbb{R})$, $0 \le h(t) \le 1$, $h(t) = 1$ при $t \in [0,T]$, $h(t) = 0$ при $t \notin (-\varepsilon, T+\varepsilon)$, де ε — довільне додатне число, оскільки $(\tilde{f},\varphi) = (f,\varphi)$ на кожній $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$ та $\tilde{f}$ має носій в $\bar{Q}_T$: для кожної $\psi \in D(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{Q}_T)$ існує таке $\varepsilon > 0$, що $h(t)\psi(x,t) \equiv 0$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, а тоді $(\tilde{f},\psi) = (f, h\psi) = (f, 0) = 0$, тобто $\tilde{f} = 0$ в $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{Q}_T$. Очевидно, що функціонал $\tilde{f}$ лінійний та неперервний на $D(\mathbb{R}^2)$.

Через $\hat{*}$ позначаємо операцію згортки узагальненої функції з основною функцією ([15], с. 111)

$$(g\hat{*}\varphi)(x) = (g(\xi), \varphi(x+\xi)), \quad g \in D'(\mathbb{R}), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Функціонал $f*g \in D'(\mathbb{R})$, який діє за правилом $(f*g,\varphi) = (f, g\hat{*}\varphi)$, $\forall\varphi \in D(\mathbb{R})$, називається згорткою узагальнених функцій f та g ([15], с. 111). Зауважимо, що $f(x)\hat{*}\varphi(x) = f(-x)*\varphi(x)$ ([2], с. 80), а при існуванні $f*g$ правильна рівність $(f*g)\hat{*}\varphi = f\hat{*}(g\hat{*}\varphi)$.

Через $\times$ позначаємо прямий добуток узагальнених функцій $f, g \in D'(\mathbb{R})$ ([2, с. 54]) $(f(x) \times g(t), \varphi(x,t)) = (f(x), (g(t), \varphi(x,t)))$, $\forall\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$.

Через $D'_+(\mathbb{R})$ позначають простір тих розподілів із $D'(\mathbb{R})$, які дорівнюють нулю при $t < 0$ [2, ст. 87]. Використовуємо функцію $f_\lambda \in D'_+(\mathbb{R})$, яку визначають [2, с. 87] так:

$$f_\lambda(t) = \frac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \text{ при } \lambda > 0 \text{ та } f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t) \text{ при } \lambda \le 0,$$

де $\theta(t)$ — функція Хевісайда, $\Gamma(\lambda)$– гамма-функція. Правильні співвідношення

$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu} \ \ ([2, \text{с. } 87]), \quad f_\lambda \hat{*} f_\mu = f_{\lambda+\mu} \ \ ([1, \text{с. } 145]).$$

Оператор згортки $(f_{-\lambda}*)$ в алгебрі $D'_+(\mathbb{R})$ при $\lambda > 0$ називають оператором дробового диференціювання Рімана-Ліувілля, а оператор $(f_{-\lambda}\hat{*})$ — оператором дробового диференціювання Вейля ([1, с. 133]).

Нехай $\alpha \in (0;1)$. Для $v \in D(\bar{Q}_T)$ визначено

$$f_{-\alpha}(t)\hat{*}v(x,t) = f'_{1-\alpha}(t)\hat{*}v(x,t) = -f_{1-\alpha}(t)\hat{*}v_t(x,t)$$
$$= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_t^T \frac{v_\eta(x,\eta)}{(\eta-t)^\alpha}d\eta = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_t^T \frac{v(x,\eta)}{(\eta-t)^\alpha}d\eta, \quad (x,t) \in Q_T.$$

У [16] введено регуляризовану похідну $D_t^\alpha v$ функції v порядку $\alpha \in (0;1)$

$$D_t^\alpha v(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{v(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau - f_{1-\alpha}(t)v(x,0),\ (x,t) \in Q_T.$$

Зауважимо, що за умови існування неперервної $v_t(x,t)$, $(x,t) \in Q_T$, маємо

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{v_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{v(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau - f_{1-\alpha}(t)v(x,0), \quad (x,t) \in Q_T \text{ [1, c. 135]}.$$

Нехай $\varepsilon_0 \in (0,T]$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$, $Q_{T,\varepsilon} = \{(x,t) \in Q_T : \varepsilon < t \le T\}$. Позначаємо через $C^{2,\alpha}(Q_T)$ клас функцій $v(x,t)$, $(x,t) \in Q_T$, неперервних, обмежених, двічі неперервно диференційовних за змінною x в Q_T, рівних нулю при $t > T$, для яких при кожному $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ існують неперервні в $Q_{T,\varepsilon}$ функції

$$(f_{-\alpha}(t) * v(x,t))^\varepsilon = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_\varepsilon^t \frac{v(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau - f_{1-\alpha}(t-\varepsilon)v(x,\varepsilon).$$

Для $v \in D'(\bar{Q}_T)$ визначено

$$f_{-\alpha}(t) * v(x,t) = f'_{1-\alpha}(t)*v(x,t) = f_{1-\alpha}(t)*v_t(x,t) = (f_{1-\alpha}(t)*v(x,t))_t.$$

Введемо оператори

$\hat{L}_\alpha :\quad (\hat{L}_\alpha v)(x,t) \equiv f_{-\alpha}(t)\hat{*}v(x,t) - v_{xx}(x,t), \quad v \in D(\bar{Q}_T),$

$L_\alpha :\ (L_\alpha v)(x,t) \equiv f_{-\alpha}(t) * v(x,t) - v_{xx}(x,t),\ (x,t) \in Q_T,\ v \in D'(\bar{Q}_T),$

$L_\alpha^{reg} :\ (L_\alpha^{reg}v)(x,t) \equiv D_t^\alpha v(x,t) - v_{xx}(x,t),\ (x,t) \in Q_T,\ v \in C^{2,\alpha}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T),$

$L_\alpha^\varepsilon :\ (L_\alpha^\varepsilon v)(x,t) \equiv (f_{-\alpha}(t) * v(x,t))^\varepsilon - v_{xx}(x,t),\ (x,t) \in Q_{T,\varepsilon},\ v \in C^{2,\alpha}(Q_T).$

Для $v \in C^{2,\alpha}(Q_T)\cap C(\bar{Q}_T)$ визначено $(f_{-\alpha}(t)*v(x,t))^0 = D_t^\alpha v(x,t)$, а, отже, для таких v маємо $L_\alpha^0 v = L_\alpha^{reg}v$.

Нехай $\rho(t)$ — нескінченно диференційовна невід'ємна на $[0;T]$ функція, додатна на $(0;T]$, яка має порядок $t^{\frac{\alpha}{2}}$ при $t \to 0$ ($\lim\limits_{t\to 0+}\frac{\rho(t)}{t^{\frac{\alpha}{2}}} = \mathrm{const}$) та $\rho_1(t) \le 1$ при $t \in [0;T]$.

Вводимо ваговий функційний простір

$$M_k(Q_T) = \{u \in L_{1,loc}(Q_T) :\ \|u\|_k = \int_{Q_T} \rho^k(t)|u(x,t)|dxdt < +\infty\},\ k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}.$$

Зауважимо, що $M_0(Q_T) = L_1(Q_T)$. Використовуємо функційний простір $X_k(\bar{Q}_T) = \{\varphi \in D(\bar{Q}_T) :\ \rho^{-k}(\hat{L}_\alpha\varphi) \in C(\bar{Q}_T)\}$. Вважаємо, що $\varphi_l \to 0$, $l \to \infty$ у $X_k(\bar{Q}_T)$, якщо $\varphi_l \to 0$ та $\varrho^{-k}\hat{L}_\alpha\varphi_l \to 0$, $l \to \infty$ рівномірно в $\bar{Q}_T$. З леми 1 у [13] випливає, що $X_k(\bar{Q}_T)$ непорожній.

Лема 1.1. *Для функцій $u \in C^{2,\alpha}(Q_T)\bigcap C(\bar{Q}_T)$, $v \in D(\bar{Q}_T)$ правильна формула Ґріна*

$$\int_{Q_T}(L_\alpha^{reg}u)(x,t)v(x,t)dxdt = \int_{Q_T}u(x,t)(\hat{L}_\alpha v)(x,t)dxdt - \int_{Q_T}f_{1-\alpha}(t)u(x,0)v(x,t)dxdt. \quad (1)$$

Доведення. Враховуючи, що $L_\alpha^0 u = L_\alpha^{reg}u$ для $u \in C^{2,\alpha}(Q_T)\bigcap C(\bar{Q}_T)$, цю формулу одержуємо із формули (4) в [13] при $\varepsilon = 0$. □

Зауваження 1.1. *Для довільних $u \in C^{2,\alpha}(Q_T)\bigcap C(\bar{Q}_T)$, $v \in D(\bar{Q}_T)$ маємо*

$$\int_{Q_T} f_{1-\alpha}(t)u(x,0)v(x,t)dxdt = (u(x,0) \times f_{1-\alpha}(t), v(x,t)) = (u(x,0), (f_{1-\alpha}(t), v(x,t))).$$

Оскільки

$$(f_{1-\alpha}(t), v(x,t)) = \int_0^T f_{1-\alpha}(\tau)v(x,\tau)d\tau = (f_{1-\alpha}(\tau), v(x,\tau+t))\,|_{t=0} = [f_{1-\alpha}(t)\hat{*}v(x,t)]|_{t=0},$$

то матимемо

$$\int_{Q_T} f_{1-\alpha}(t)u(x,0)v(x,t)dxdt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0)[f_{1-\alpha}(t)\hat{*}v(x,t)]|_{t=0}dx,$$

а при $u_0 \in D'(\mathbb{R})$ та $v \in D(\bar{Q}_T)$

$$(u_0(x) \times f_{1-\alpha}(t), v(x,t)) = (u_0(x), [f_{1-\alpha}(t)\hat{*}v(x,t)]|_{t=0}). \quad (2)$$

2 Формулювання задачі Коші

Означення 2.1. *Кажуть, що узагальнена функція $f \in D'(\mathbb{R})$ має порядок сингулярності $s(f) \le s_0$ ([15, с. 46]), якщо $(f,\varphi) = \sum\limits_{i=0}^{s_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^{(i)}(x)f_i(x)dx$, $\forall\varphi \in D(\mathbb{R})$, де $f_i \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$, $i = \overline{0,s_0}$.*

Припущення (S): $u_0 \in D'(\mathbb{R})$, $s(u_0) \le s$, $k \ge \frac{s}{2} - 1$, функція $g(x,t,z)$ ($(x,t) \in Q_T$, $z \in \mathbb{R}$) неперервна.

За припущення (S) розглянемо задачу Коші (задачу K)

$$(L_\alpha u)(x,t) = g(x,t,u(x,t)), \quad (x,t) \in Q_T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Формулювання 1 задачі K: знайти таку функцію $u \in M_k(Q_T)$, що задовольняє тотожність

$$\int_{Q_T} u(x,t)(\hat{L}_\alpha\psi)(x,t)dxdt = \int_{Q_T} g(x,t,u(x,t))\psi(x,t)dxdt+ \quad (3)$$
$$+(u_0(x) \times f_{1-\alpha}(t), \psi(x,t)) \quad \forall\psi \in X_k(\bar{Q}_T).$$

Зрозуміло, що для розв'язку u задачі виконується умова

$$\left|\int_{Q_T} g(x,t,u(x,t))\psi(x,t)dxdt\right| < +\infty \quad \forall\psi \in X_k(\bar{Q}_T). \quad (4)$$

Формулювання 2 задачі K: знайти функцію $u \in M_k(Q_T)\bigcap C^{2,\alpha}(Q_T)$, що є границею (в $M_k(Q_T)$) послідовності розв'язків $u^\varepsilon \in C^{2,\alpha}(Q_T)$ задач

$$(L_\alpha^\varepsilon u)(x,t) = g(x,t,u(x,t)), \quad (x,t) \in Q_{T,\varepsilon}, \quad (5)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(x,\varepsilon)\varphi(x)dx = (u_0,\varphi), \quad \forall\varphi\in D(\mathbb{R}). \qquad (6)$$

Зауваження 2.1. *З доведення теореми 1 із [13] випливає можливість виконання умови (6) із деякою $u_0\in D'(\mathbb{R})$, порядку сингулярності $s(u_0)\le 2k+2$, якщо для границі (в $M_k(Q_T)$) послідовності $u^\varepsilon\in C^{2,\alpha}(Q_T)$ розв'язків рівнянь (5) виконується умова*

$$\int_{Q_{T,\varepsilon}} g(x,t,u^\varepsilon(x,t))\psi(x,t)dxdt \to \int_{Q_T} g(x,t,u(x,t))\psi(x,t)dxdt,\ \varepsilon\to 0, \quad \forall\psi\in X_k(\bar Q_T). \quad (7)$$

Ясно, що $g(\cdot,u(\cdot))\in C(Q_T\times\mathbb{R})$ при $u\in C^{2,\alpha}(Q_T)$.

3 Порівняння формулювань задачі Коші

Теорема 1. *Розв'язок $u\in M_k(Q_T)\bigcap C^{2,\alpha}(Q_T)$ задачі К у формулюванні 1 є розв'язком цієї задачі у формулюванні 2. Розв'язок $u\in M_k(Q_T)\bigcap C^{2,\alpha}(Q_T)$ задачі К у формулюванні 2, для якого виконується умова (4), є розв'язком її у формулюванні 1.*

Доведення. Нехай функція $u\in M_k(Q_T)\bigcap C^{2,\alpha}(Q_T)$ задовольняє умову (4) та є розв'язком задачі К у формулюванні 2, а, отже, є границею (в $M_k(Q_T)$) послідовності розв'язків $u^\varepsilon\in C^{2,\alpha}(Q_T)$ задач (5), (6). Для довільної $\psi\in X_k(\bar Q_T)$ визначимо $\psi_\varepsilon(x,t)=\psi(x,t-\varepsilon)$, $t\in[\varepsilon,T+\varepsilon]$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0/2]$. Тоді $\psi_\varepsilon(x,t)\to\psi(x,t)$ та $\varrho^{-k}(t-\varepsilon)(\hat L_\alpha\psi_\varepsilon)(x,t)\to\varrho^{-k}(t)(\hat L_\alpha\psi)(x,t)$, $\varepsilon\to 0$ рівномірно в $\bar Q_T$ ($\psi_\varepsilon\to\psi$ в $X_k(\bar Q_T)$). В області $Q_{T,\varepsilon}$ запишемо формулу Ґріна (5) із [13] для u^ε та ψ_ε:

$$\int_{Q_{T,\varepsilon}} u^\varepsilon(x,t)(\hat L_\alpha\psi_\varepsilon)(x,t)dxdt - \int_{Q_{T,\varepsilon}} g(x,t,u^\varepsilon(x,t))\psi_\varepsilon(x,t)dxdt \qquad (8)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(x,\varepsilon)\Big[f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_\varepsilon(x,t)\Big]\Big|_{t=\varepsilon}dx.$$

З умов теореми та з припущення (4) випливає існування границі при $\varepsilon\to 0$ кожного доданку у лівій частині рівності (8).

З умови (6) та леми з [15, с. 70] одержуємо, що для довільної $\varphi_\varepsilon\in D(\mathbb{R})$ такої, що $\varphi_\varepsilon\to\varphi$ при $\varepsilon\to 0$ у просторі $D(\mathbb{R})$ ([15, с. 13]), також існує

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(x,\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(x,\varepsilon)\varphi(x)dx.$$

Доведемо, що для довільної $\psi\in X_k(\bar Q_T)$ виконується

$$\varphi_\varepsilon(x)=\int_\varepsilon^T f_{1-\alpha}(\tau-\varepsilon)\psi(x,\tau)d\tau\to\varphi(x)=\int_0^T f_{1-\alpha}(\tau)\psi(x,\tau)d\tau=\Big[f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi(x,t)\Big]\Big|_{t=0}$$

при $\varepsilon\to 0$ у просторі $D(\mathbb{R})$ ([15, с. 13]).

За властивістю операції $\hat{*}$ існує такий скінченний відрізок $[a;b]$, що $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon\subset[a;b]$ для всіх $\varepsilon\in[0;\varepsilon_0]$ та неперервні $\varphi_\varepsilon^{(q)}(x)=\int_\varepsilon^T f_{1-\alpha}(\tau-\varepsilon)(\frac{\partial}{\partial x})^q\psi(x,\tau)d\tau$, $q=0,1,\dots$. Звідси $\varphi_\varepsilon\in C_0^\infty([a,b])$ для всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, крім того для всіх $q=0,1,\dots$ послідовності $\varphi_\varepsilon^{(q)}(x)$ рівномірно щодо $x\in[a,b]$ збігаються

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon^{(q)}(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^T f_{1-\alpha}(\tau-\varepsilon)(\frac{\partial}{\partial x})^q\psi(x,\tau)d\tau=\int_0^T f_{1-\alpha}(\tau)(\frac{\partial}{\partial x})^q\psi(x,\tau)d\tau.$$

Таким чином, $\varphi(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon(x)$ в $D(\mathbb{R})$. За лемою з [15, с. 70] також існує границя

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_\varepsilon(x,t)\Big]\Big|_{t=\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^T f_{1-\alpha}(t-\varepsilon)\psi(x,t)dt=\varphi(x).$$

Отже, з умови (6) випливає існування границі

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(x,\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(x,\varepsilon)(\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon(x))dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(x,\varepsilon)\varphi(x)dx$$

$$=(u_0,\varphi)=(u_0,\int_0^T f_{1-\alpha}(\tau)\psi(\cdot,\tau)d\tau)=(u_0(x)\times f_{1-\alpha}(\tau),\psi(x,\tau)).$$

Тому після переходу в (8) до границі при $\varepsilon\to 0$ отримаємо тотожність (3). Отже, розв'язок задачі К у формулюванні 2 є розв'язком цієї задачі у формулюванні 1.

Тепер нехай $u\in M_k(Q_T)\bigcap C^{2,\alpha}(Q_T)$ та u є розв'язком задачі К у формулюванні 1, а, отже, задовольняє тотожність (3). Звідси для $\psi\in D(Q_T)$ (очевидно, що $D(Q_T)\subset X_k(\bar Q_T)$ для всіх $k\ge 0$) маємо

$$\int_{Q_T} u(x,t)(\hat L_\alpha\psi)(x,t)dxdt=\int_{Q_T} g(x,t,u(x,t))\psi(x,t)dxdt,$$

а з формули Ґріна (4) в [13] для $v=u\in C^{2,\alpha}(Q_T)$, $\psi\in D(Q_{T,\varepsilon})$ ($\subset X_k(\bar Q_{T,\varepsilon})$)

$$\int_{Q_{T,\varepsilon}} u(x,t)(\hat L_\alpha\psi)(x,t)dxdt=\int_{Q_{T,\varepsilon}}(L_\alpha^\varepsilon u)(x,t)\psi(x,t)dxdt \quad \forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0).$$

Отже,

$$\int_{Q_{T,\varepsilon}}(L_\alpha^\varepsilon u)(x,t)\psi(x,t)dxdt=\int_{Q_{T,\varepsilon}} g(x,t,u(x,t))\psi(x,t)dxdt\ \ \forall\ \psi\in D(Q_{T,\varepsilon}).$$

За лемою Дюбуа-Реймона [2, ст. 28] звідси одержуємо, що $(L_\alpha^\varepsilon u)(x,t)=g(x,t,u(x,t))$ майже всюди в $Q_{T,\varepsilon}$, а з того, що $u\in C^{2,\alpha}(Q_T)$ та з неперервності функції g одержуємо

$$(L_\alpha^\varepsilon u)(x,t)=g(x,t,u(x,t)) \text{ для всіх } (x,t)\in Q_{T,\varepsilon}.$$

Ми показали, що розв'язок $u \in M_k(Q_T) \bigcap C^{2,\alpha}(Q_T)$ задачі K у формулюванні 1 задовольняє кожне з рівнянь (5) в $Q_{T,\varepsilon}$. Оскільки функція $u \in M_k(Q_T)$, $g(x,t,u(x,t))$ неперервна в Q_T та виконується (4), то існує границя при $\varepsilon \to 0$ лівої частини рівності (8), яка дорівнює $\int\limits_{Q_T} [u(x,t)(\hat{L}_\alpha \psi)(x,t) - g(x,t,u(x,t))\psi(x,t)]dxdt$. Тоді існує границя $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,\varepsilon)\Big[f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_\varepsilon(x,t)\Big]\Big|_{t=\varepsilon} dx$.

Враховуючи (3), для довільних $\psi \in X_k(\bar{Q}_T)$, $\psi_\varepsilon(x,t) = \psi(x,t-\varepsilon)$ та розв'язку $u \in M_k(Q_T) \bigcap C^{2,\alpha}(Q_T)$ задачі K у формулюванні 1 матимемо

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,\varepsilon)\Big[f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_\varepsilon(x,t)\Big]\,\Big|_{t=\varepsilon} dx = (u_0(x) \times f_{1-\alpha}(t), \psi(x,t)),$$

а, згідно з формулою (2),

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,\varepsilon)\Big[f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi(x,t)\Big]\Big|_{t=\varepsilon} dx = (u_0(x), (f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi(x,t))|_{t=0}). \tag{9}$$

За лемою 1 [13] для довільної функції $\varphi \in D(\mathbb{R})$ існує така $\psi_2 \in X_k(\bar{Q}_T)$, що $(f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_2(x,t))|_{t=0} = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, (а отже, $(u_0(x), (f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi(x,t))|_{t=0}) = (u_0, \varphi)$), відповідно $\Big[f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_{2\varepsilon}(x,t-\varepsilon)\Big]\Big|_{t=\varepsilon} = \Big[f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_{2\varepsilon}(x,t)\Big]\Big|_{t=0} = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, а, отже,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,\varepsilon)(f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_{2\varepsilon}(x,t))|_{t=\varepsilon} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,\varepsilon)\varphi(x)dx.$$

Тому з (9) випливає, що $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,\varepsilon)\varphi(x)dx = (u_0, \varphi)$, $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$, а, отже, розв'язок u задачі K у формулюванні 1 задовольняє початкову умову (6). □

4 Існування розв'язку узагальненої задачі Коші для лінійного однорідного рівняння з дробовою похідною за часом

У [7] доведено існування та єдиність розв'язку $u \in C^{2,\alpha}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ задачі Коші

$$(L_\alpha^{reg} u)(x,t) = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{10}$$

$$u(x,0) = g_1(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

з такою неперервною g_1, що $|g_1(x)| \le C\exp\{h|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}\}$, $x \in \mathbb{R}$, де $0 \le h < \mu_0 T^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}$, $\mu_0 = (2-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{2}} 2^{-\frac{2}{2-\alpha}}$, і одержано його зображення

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(x-y,t)g_1(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

за допомогою ядра $G_1(x,t)$. Знайдені оцінки ядра $G_1(x,t)$ та його похідних:

$$\left|\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^j G_1(x,t)\right| \le Ct^{-\frac{(j+1)\alpha}{2}} \exp\Big\{-\mu_j|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}t^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\Big\} \text{ при } t^{-\alpha}|x|^2 \ge 1, \tag{13}$$

$$\left|\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^j G_1(x,t)\right| \le Ct^{-\frac{(j+1)\alpha}{2}} \text{ при } t^{-\alpha}|x|^2 \le 1, \quad j = 0,1,2..., \tag{14}$$

$$\left|D_t^\beta G_1(x,t)\right| \le Ct^{-\frac{\alpha}{2}-\beta} \exp\Big\{-\mu_\beta|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}t^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\Big\} \text{ при } t^{-\alpha}|x|^2 \ge 1,$$

$$\left|D_t^\beta G_1(x,t)\right| \le Ct^{-\frac{\alpha}{2}-\beta} \text{ при } t^{-\alpha}|x|^2 \le 1, \quad 0 < \beta < 1,$$

де за μ_j і μ_β можна взяти довільні додатні числа, менші за μ_0. Різні додатні сталі ми позначили однією буквою C.

Припущення (L): $u_0 \in (C^\infty(\mathbb{R}))'$, $s(u_0) \le s$, $k > s - \frac{2}{\alpha}$.

За припущення (L) розглянемо задачу Коші

$$(L_\alpha u)(x,t) = 0, (x,t) \in Q_T, \tag{15}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Теорема 2. *За припущення (L) існує єдиний розв'язок $u \in C^{2,\alpha}(Q_T) \cap M_k(Q_T)$ задачі Коші (15), (16), визначений формулою*

$$u(x,t) = (u_0(y), G_1(x-y,t)), \quad (x,t) \in Q_T. \tag{17}$$

Доведення. В [7] показано, що функція $G_1(x,t)$ нескінченно диференційовна при $(x,t) \ne (0,0)$, а, отже, $G_1(x-y,t)$ — нескінченно диференційовна при $(x,t) \in Q_T$ і права частина (17) має сенс. З вигляду u та властивостей G_1 випливає, що функція (17) належить класу $C^{2,\alpha}(Q_T)$. Покажемо, що вона належить простору $M_k(Q_T)$. Для цього знайдемо оцінку $\int\limits_{Q_T} \varrho^k(t)|u(x,t)|dxdt$. З означення порядку сингулярності узагальненої функції маємо $(u_0(y), G_1(x-y,t)) = \sum\limits_{i=0}^{s_0} \int\limits_B (\frac{\partial}{\partial y})^i G_1(x-y,t) f_i(y)dy$, $(x,t) \in Q_T$, де $B = \mathrm{supp} u_0$, $f_i \in L_1(B)$. Враховуючи оцінки (13), (14), як у [8, с. 144], за умови на число k одержуємо обмеженість усіх інтегралів $\int\limits_{Q_T} \varrho^k(t)|(\frac{\partial}{\partial y})^i G_1(x-y,t)|dxdt$, $i = \overline{0,s}$, певною додатною сталою $\widehat{C}_k$. Тоді

$$\int_{Q_T} \varrho^k(t)|u(x,t)|dxdt \le \sum_{i=0}^{s} \int_{Q_T} \varrho^k(t)\Big(\int_B (|\frac{\partial}{\partial y})^i G_1(x-y,t)| \cdot |f_i(y)|dy\Big)dxdt$$

$$= \sum_{i=0}^{s} \int_B \Big(\int_{Q_T} \varrho^k(t)|(\frac{\partial}{\partial y})^i G_1(x-y,t)|dxdt\Big)|f_i(y)|dy \le \widehat{C}_k \cdot \sum_{i=0}^{s} \int_B |f_i(y)|dy = C_k.$$

Покажемо, що функція (17) задовольняє тотожність (3) для кожної $\psi \in X_k(\bar{Q}_T)$. З визначення функції $G_1(x,t)$ як ядра Пуассона задачі Коші випливає, що

$$L_\alpha^{reg} G_1(x,t) = 0 \text{ при } (x,t) \in Q_T, \quad G_1(x,0) = \delta(x).$$

Підставляючи у формулу (1) функцію $g_1(x)$ замість $u(x,0)$ та зображення (12) розв'язку класичної задачі Коші (10), (11), для кожної $v = \psi \in X_k(\bar{Q}_T)$ матимемо

$$\int_{Q_T} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} G_1(x-y,t)g_1(y)dy\Big)(\hat{L}_\alpha \psi)(x,t)dxdt = \int_{Q_T} f_{1-\alpha}(t)g_1(x)\psi(x,t)dxdt,$$

тобто

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{Q_T} G_1(x-y,t)(\hat{L}_\alpha\psi)(x,t)dxdt\Big)g_1(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_0^T f_{1-\alpha}(t)\psi(y,t)dt\Big)g_1(y)dy.$$

Враховуючи довільність функції $g_1(y)$, звідси одержуємо, що для кожної $\psi \in X_k(\bar{Q}_T)$

$$\int_{Q_T} G_1(x-y,t)(\hat{L}_\alpha\psi)(x,t)dxdt = \int_0^T f_{1-\alpha}(t)\psi(y,t)dt, \quad (y,t)\in\bar{Q}_T,$$

а тоді, враховуючи вигляд функції (17), її властивості, аналог теореми Фубіні ([2, с. 59], формула (3.2)) та формулу (2), для довільної $\psi \in X_k(\bar{Q}_T)$ матимемо

$$\int_{Q_T} u\cdot\hat{L}_\alpha\psi dxdt = \int_{Q_T}\Big(u_0(y), G_1(x-y,t)\Big)\hat{L}_\alpha\psi(x,t)dxdt = \Big(u_0(y), \int_{Q_T} G_1(x-y,t)\hat{L}_\alpha\psi(x,t)dxdt\Big)$$

$$= \Big(u_0(y), \int_0^T f_{1-\alpha}(t)\psi(y,t)dt\Big) = \Big(u_0(y)\times f_{1-\alpha}(t), \psi(y,t)\Big).$$

Ми показали, що функція (17) є розв'язком задачі (15), (16) у формулюванні 1. За теоремою 1 вона буде розв'язком цієї задачі й у формулюванні 2.

Доведемо єдиність розв'язку задачі (15), (16). Якщо u_1, u_2 — два її розв'язки, $u = u_1 - u_2$, то $u \in M_k(Q_T)$, а згідно з формулюванням 2, враховуючи фінітність заданої узагальненої функції u_0,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(y,\varepsilon)\varphi(y)dy = 0, \quad \forall\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}).$$

За лемою з [15, с. 70] для довільної $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ такої, що $\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon = \varphi$ в $C^\infty(\mathbb{R})$, також існує

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(y,\varepsilon)\varphi_\varepsilon(y)dy = 0, \quad \forall\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}). \tag{18}$$

Враховуючи, що $(L_\alpha^\varepsilon v)(x,t) = (L_\alpha^{reg} v(x,t+\varepsilon))(x,t-\varepsilon)$, $v \in C^{2,\alpha}(\bar{Q}_T)$, із формули (12) одержуємо зображення розв'язків u^ε:

$$u^\varepsilon(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(x-y,t-\varepsilon)u^\varepsilon(y,\varepsilon)dy, \quad (x,t)\in Q_{T,\varepsilon}. \tag{19}$$

Для кожної фіксованої точки $(x,t) \in Q_{T,\varepsilon}$ функція $G_1(x-y,t-\varepsilon)$ як функція y належить $C^\infty(\mathbb{R})$. Тоді з умови (18) (при $G_1(x-y,t-\varepsilon)$ замість $\varphi_\varepsilon(y)$) випливає існування

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(y,\varepsilon)G_1(x-y,t-\varepsilon)dy = 0, \quad (x,t)\in Q_T. \tag{20}$$

Тепер із формули (19) з врахуванням умови (20) одержуємо, що $u^\varepsilon(x,t)\to 0$, $\varepsilon\to 0$ у кожній точці $(x,t)\in Q_T$, а тоді $u^\varepsilon(x,t)\to 0$, $\varepsilon \to 0$ в $M_k(Q_T)$. Згідно з формулюванням 2 задачі, $u(x,t) = \lim_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon(x,t)$ в $M_k(Q_T)$. В результаті одержуємо $u(x,t)=0$, $(x,t)\in Q_T$.

Достатні умови розв'язності задачі К (для півлінійного рівняння) за припущення (S) знаходимо, використовуючи методику [8], [11], властивості ядра Пуассона $G_1(x,t)$ із [7] та властивості функції $G_0(x,t) = f_{\alpha-1}(t) * G_1(x,t)$. □

Одержані результати поширюються на випадок рівняння

$$f_{-\alpha}(t) * u = A(x,D)u + g(x,t,u), \quad (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0;T],$$

де $A(x,D)$ — лінійний еліптичний диференціальний вираз другого порядку з нескінченно диференційовними коефіцієнтами в $\mathbb{R}^n$.

Література

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций (Серия: СМБ). — М.: Мир, 1970. — 328 с.
2. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979. — 320 с.
3. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. *О начальных данных гладких решений некоторых классов параболических уравнений* // Успехи мат. наук. — 1979. — Т.34, №4. — С. 164.
4. Городецкий В.В., Дринь Я.М. Параболические псевдодифференциальные уравнения в пространстве обобщенных функций. — Львов, 1991.— 57 с. (Препр. АН Украины. Ин-т прикл. пр. мех. и мат.; №4-91.)
5. Грушин В.В. *О поведении решений дифференциальных уравнений вблизи границы* // Докл. АН СССР. — 1964. — Т.158. — С. 264–267.
6. Гупало А.С., Лопушанская Г.П. Об обобщенных граничных значениях решения однородного параболического уравнения второго порядка. Методы исследования дифференциальных и интергральных операторов. — К.: Наук. думка, 1989. — С.54–59.
7. Кочубей А.Н. *Диффузия дробного порядка* // Дифференциальные уравнения. — 1990. — Т.26, №4. — С. 660–670.
8. Лопушанська Г.П. Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D'. — Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2002. — 287 с.
9. Лопушанська Г.П. *Основні граничні задачі для одного рівняння в дробових похідних* // Укр. мат. журн. — 1999. — Т.51, №1. — С. 48–59.
10. Лопушанська Г.П., Чмир О.Ю. *Узагальнені крайові значення розв'язків півлінійних еліптичних та параболічних рівнянь* // Нелінійні граничні задачі. — 2007. — Т.17. — С. 50–73.
11. Лопушанська Г.П., Чмир О.Ю. *Узагальнені крайові значення розв'язків рівняння $u_t = \Delta u + F_0(x,t,u)$* // Математичні Студії. — 2004. — Т.22, №1. — С. 45–56.
12. Лопушанский А.О. *Абстрактная параболическая задача Коши в комплексных интерполяционных шкалах* // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т.46, №12. — С. 1799–1803.
13. Лопушанський А.О., Лопушанська Г.П., Пасічник О.В. *Сліди розв'язків півлінійних рівнянь з дробовою похідною за часом* // Карпат. матем. публ. — 2011. — Т.3. №1. — С. 85–93.
14. Чмир О.Ю. *Про формулювання узагальненої крайової задачі для півлінійного параболічного рівняння* // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2003. — Вип.62. — С. 134–143.

15. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальний курс — М.: Наука, 1965. — 328 с.

16. Caputo M. *Liner model of dissipation whose Q is almost frequency independent*, II. Geophys. J. R. Astr. Soc., **13** (1967), 520–539.

17. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type, Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2004.

[1] Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна
[2] Львівський національний університет імені Івана Франка,
Львів, Україна
e-mail: *lhp@ukr.net*, *olena.pasichnyk@gmail.com*

Надійшло 05.12.2011

Lopushansky A.O., Lopushanska H.P., Pasichnyk O.V. *Two definitions of the generalized Cauchy problem for semi-linear diffusion equation with fractional derivative with respect to time*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 72–82.

Different equivalent definitions of the Cauchy problem for semi-linear diffusion equation with fractional derivative with respect to time and with the generalized function in the initial condition are offered. The existence and uniqueness theorem and the representation of the solution of such problem for linear homogeneous diffusion equation with fractional derivative with respect to time are obtained.

Лопушанский А.О., Лопушанская Г.П., Пасичник Е.В. *Две постановки обобщенной задачи Коши для полулинейного уравнения диффузии с дробной производной по времени* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 72–82.

Предложено две эквивалентные постановки задачи Коши для полулинейного уравнения дробного порядка $\alpha \in (0;1)$ по времени с обобщенной функцией в начальном условии. Доказана теорема существования и единственности, получено представление решения такой задачи для линейного однородного уравнения с дробной производной по времени.

Карпатські математичні публікації. Т.4, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №1

УДК 517.98

Лопушанський О.В., Шарин С.В.

ФУНКЦІОНАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ ГЕНЕРАТОРІВ АНАЛІТИЧНИХ НАПІВГРУП ОПЕРАТОРІВ

Лопушанський О.В., Шарин С.В. *Функціональне числення для генераторів аналітичних напівгруп операторів* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — С. 83–89.

Ми будуємо функціональне числення для генераторів однопараметричних обмежених аналітичних напівгруп операторів на банаховому просторі. Клас символів такого числення складається з образів перетворення Лапласа згорткової алгебри $\mathcal{S}'_+$ розподілів повільного росту з носіями в $[0,\infty)$. Область визначення побудованого числення є щільною в банаховому просторі.

Вступ

Однією із характеристик аналітичних напівгруп є те, що їх генератори є так званими секторіальними операторами. Такі оператори відіграють важливу роль в теорії еліптичних і параболічних диференціальних рівнянь з частинними похідними. В роботах [4, 8] (серед багатьох інших) було побудовано функціональне числення для аналітичних напівгруп операторів, яке базувалося на використанні інтеграла Ріса-Данфорда та інтегральної формули Коші.

У цій статті ми будуємо операторне числення для генераторів однопараметричних аналітичних напівгруп e^{itA} операторів, що діють в банаховому просторі E, використовуючи при цьому узагальнене перетворення Лапласа. Алгебра символів такого числення складається з аналітичних в півплощині $\mathbb{C}_+ = \{\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C} \colon \xi \in (0,\infty)\}$ функцій $\widehat{f}$, які є перетвореннями Лапласа розподілів Шварца повільного росту $f \in \mathcal{S}'_+$ з носіями в додатній півосі $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$. Функціональне числення $\Phi \colon \widehat{f} \longmapsto \widehat{f}(A)$ (теорема 3.2) ми визначаємо за формулою (4), причому областю визначення цього числення є щільний в E підпростір $\mathfrak{A}$ цілих аналітичних векторів поліноміального росту оператора A (теорема 3.1). Зауважимо, що формула (4) є операторним аналогом узагальненого перетворення Лапласа $\widehat{f}(\zeta) = \langle f(t), e^{it\zeta}\rangle$ [1, II.9]. Суттєвою відмінністю цієї роботи від попередніх є алгебраїчний аспект функціонального числення. А саме, відображення Φ є гомоморфізмом алгебр, тобто виконується властивість $\widehat{f * g}(A) = \widehat{f}(A)\widehat{g}(A)$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 46F05, 46H30, 47A60.
Ключові слова і фрази: функціональне числення, аналітичні напівгрупи операторів, узагальнені функції Шварца повільного росту.

1 Позначення та основні поняття

Нехай $\mathscr{L}(X)$ — простір неперервних лінійних операторів на локально опуклому просторі X. Спряжений до X простір ми будемо позначати X', який всюди далі наділятимемо топологією рівномірної збіжності на обмежених підмножинах в X.

Всюди далі ми будемо використовувати позначення $\partial^\alpha := (-\mathrm{i})^\alpha \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$, де $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, $\alpha \in \mathbb{N}$. Для спрощення позначень писатимемо $\partial := \partial^1$.

Під однопараметричною напівгрупою обмежених лінійних операторів на банаховому просторі $(E, \|\cdot\|)$ з генератором A ми розуміємо таке відображення

$$U_t\colon \mathbb{R}_+ \ni t \longmapsto e^{\mathrm{i}tA} \in \mathscr{L}(E), \tag{1}$$

що $U_{t+s} = U_t \circ U_s$ для всіх $t, s \in \mathbb{R}_+$ і $U_0 = I$ — одиничний оператор в $\mathscr{L}(E)$. Відображення (1) називається C_0-напівгрупою, якщо $\lim\limits_{t\to+0} \|U_t x - x\| = 0$ для всіх $x \in E$. Генератор A напівгрупи U_t визначають за формулою

$$Ax = -\mathrm{i} \lim_{t\to+0} t^{-1}(U_t x - x) = \partial U_t x\,|_{t=0}, \qquad x \in \mathfrak{D}(A),$$

де $\mathfrak{D}(A)$ складається з усіх $x \in E$, для яких існує вище записана границя. Для того, щоб підкреслити, що генератором напівгрупи U_t є оператор A часто напівгрупу позначають $e^{\mathrm{i}tA}$. Напівгрупа U_t називається обмеженою аналітичною напівгрупою, якщо відображення (1) можна аналітично продовжити в деяку кутову область в $\mathbb{C}$, що містить $\mathbb{R}_+$, причому таке продовження є рівномірно обмеженою в цій області функцією. Відомо, що кожна така напівгрупа є C_0-напівгрупою. Детальнішу інформацію про теорію напівгруп операторів можна знайти в [6, 4].

Введемо в розгляд простір Шварца $\mathcal{S}$ швидко спадних функцій так, як це зроблено в [3]. Нехай $\mathcal{S}^\alpha$ — банаховий простір неперервно диференційованих до порядку α комплексних функцій φ на $\mathbb{R}$ зі скінченною нормою $\|\varphi\|_{\mathcal{S}^\alpha} := \sup\left\{\left|t^\alpha \partial^\beta \varphi(t)\right| : \beta \le \alpha,\, t \in \mathbb{R}\right\}$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+)$. Простір $\mathcal{S} := \bigcap_{\alpha\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{S}^\alpha$ наділимо топологією проективної границі $\mathcal{S} \simeq \lim\operatorname{pr} \mathcal{S}^\alpha$ відносно компактних вкладень $\mathcal{S}^\alpha \hookrightarrow \mathcal{S}^\beta$, де $\beta \le \alpha$. Відомо, що введений таким чином простір $\mathcal{S}$ є ядерним простором. Спряжений до нього простір $\mathcal{S}'$ називають простором узагальнених функцій Шварца повільного росту.

Означимо простір $\mathcal{S}_+ := \{\vartheta\varphi\colon \varphi \in \mathcal{S}\}$, де $\vartheta\colon \mathbb{R} \ni t \longmapsto \vartheta(t)$ — класична функція Хевісайда. Неважко показати, що простір $\mathcal{S}_+$ ізоморфний фактор простору $\mathcal{S}/\mathcal{S}_+'^{\perp}$, де $\mathcal{S}_+'^{\perp}$ — ортогональне доповнення простору $\mathcal{S}_+$ відносно двоїстості $\langle \mathcal{S}', \mathcal{S}\rangle$. Оскільки властивість ядерності наслідується фактор просторами, то $\mathcal{S}_+$ — ядерний простір. Нехай $\mathcal{S}'_+$ — замкнутий в $\mathcal{S}'$ підпростір тих розподілів, носії яких розміщені в $\mathbb{R}_+$. Відомо, що цей простір є згортковою алгеброю з одиницею δ_0, де δ_t — функціонал Дірака, зосереджений в точці $t \in \mathbb{R}_+$.

Відомо, що перетворення Фур'є $F\colon f \longmapsto F[f]$ здійснює топологічний ізоморфізм простору $\mathcal{S}'$ на себе. Тому F є коректно визначеним на $\mathcal{S}'_+$, причому образ $F[\mathcal{S}'_+]$ є замкнутим підпростором в $\mathcal{S}'$. Перетворення Лапласа розподілу $f \in \mathcal{S}'_+$ визначають за формулою

$$L[f](\zeta) := F\left[f(t)e^{-t\eta}\right](\xi) = \left\langle f(t), e^{\mathrm{i}t\zeta}\right\rangle, \qquad \zeta = \xi + \mathrm{i}\eta \in \mathbb{C}_+, \tag{2}$$

де $\widehat{f}(\zeta) := L[f](\zeta)$ — аналітична функція на $\mathbb{C}_+$. Образ $\widehat{\mathcal{S}'_+} := L\left[\mathcal{S}'_+\right]$ простору $\mathcal{S}'_+$ при перетворенні Лапласа є мультиплікативною алгеброю відносно множення $\widehat{f * g}(\zeta) = \widehat{f}(\zeta)\cdot\widehat{g}(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}_+$ [1, II.9]. Простір $\widehat{\mathcal{S}'_+}$ ми наділяємо індукованою відображенням $L\colon \mathcal{S}'_+ \longrightarrow \widehat{\mathcal{S}'_+}$ топологією.

2 Допоміжні твердження

Нехай всюди далі $(E, \|\cdot\|)$ — комплексний банаховий простір. Для довільної відкритої в $\mathbb{R}$ множини O і довільного $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ позначимо через $\mathcal{S}^\alpha(O, E)$ банаховий простір всіх неперервно диференційованих до порядку α функцій $x : \mathbb{R} \supseteq O \ni t \longmapsto x(t) \in E$ таких, що функція x і всі її похідні до порядку α включно мають скінченні границі при $t \to +0$ і для яких скінченною є норма $\|x\|_{\mathcal{S}^\alpha(\mathcal{O},\mathcal{E})} := \sup\left\{\left\|t^\alpha \partial^\beta x(t)\right\| : t \in O \subseteq \mathbb{R}, \beta \le \alpha\right\}$. Простір $\mathcal{S}(O, E) = \bigcap_{\alpha\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{S}^\alpha(O, E)$ ми наділяємо топологією проективної границі $\mathcal{S}(O, E) \simeq \lim\operatorname{pr} \mathcal{S}^\alpha(O, E)$ відносно очевидних вкладень $\mathcal{S}^\alpha(O, E) \hookrightarrow \mathcal{S}^\beta(O, E)$ при $\beta \le \alpha$. Для спрощення позначень ми будемо писати: $\mathcal{S}^\alpha(E) := \mathcal{S}^\alpha(\mathbb{R}, E)$, $\mathcal{S}(E) := \mathcal{S}(\mathbb{R}, E)$, $\mathcal{S}^\alpha_+(E) := \mathcal{S}^\alpha(\operatorname{int}\mathbb{R}_+, E)$, $\mathcal{S}_+(E) := \mathcal{S}(\operatorname{int}\mathbb{R}_+, E)$.

Наступне твердження є аналогом теореми [11] про продовження C^∞ функції, визначеної на підпросторі.

Лема 2.1. *Існує неперервний лінійний оператор продовження $\Lambda\colon \mathcal{S}_+(E) \longmapsto \mathcal{S}(E)$ такий, що $(\Lambda x)(t) = x(t)$ для $t > 0$.*

Доведення. Нехай $\mathbb{R} \ni t \longmapsto \chi(t)$ — така комплексна нескінченно диференційована функція, що $\chi(t) = 1$ при $t \in [0, 1]$ і $\chi(t) = 0$ при $t \ge 2$. В статті [11] доведено, що існує така послідовність дійсних чисел $\{a_k\}$, що: (i) $\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} |a_k| 2^{k\beta} < \infty$ для всіх $\beta \in \mathbb{Z}_+$; (ii) $\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} a_k(-2^k)^\beta = 1$ для всіх $\beta \in \mathbb{Z}_+$. Для $t < 0$ визначимо оператор Λ за правилом $(\Lambda x)(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} a_k \chi(-2^k t) x(-2^k t)$. Оскільки $-2^k \to -\infty$ при $k \to \infty$, то сума в попередній формулі є скінченною для кожного $t < 0$. З властивості (i) випливає що всі похідні $\partial^\beta(\Lambda x)(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} a_k(-2^k)^\beta \sum_{i=0}^\beta C^i_\beta \chi^{(i)}(-2^k t) x^{(\beta-i)}(-2^k t)$ збігаються при $t \to -0$. Більше того, з (ii) та з означення функції χ випливає, що ці границі узгоджуються з границями функцій $\partial^\beta x(t)$ при $t \to +0$. Таким чином, якщо $(\Lambda x)(t) := x(t)$ для $t > 0$ і $(\Lambda x)(0) := \lim_{t\to 0} x(t)$, то Λx — E-значна нескінченно диференційована функція на $\mathbb{R}$. Для будь-яких $t < 0$ і $\beta \le \alpha$ маємо

$$\left\|\partial^\beta(\Lambda x)(t)\right\| \le \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} |a_k| 2^{k\beta} \sum_{i=0}^{\beta} C^i_\beta \left|\chi^{(i)}(-2^k t)\right| \left\|x^{(\beta-i)}(-2^k t)\right\| \le K_{\beta,\chi,\{a_k\}} \sup_{t\in(0,\infty),\,\beta\le\alpha} \left\|\partial^\beta x(t)\right\|,$$

де $K_{\beta,\chi,\{a_k\}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} |a_k| 2^{k\beta} \sum_{i=0}^\beta C^i_\beta \sup_{t\in[0,2]} \left|\chi^{(i)}(t)\right| < \infty$ завдяки (i). Отже, ми довели неперервність визначеного вище лінійного відображення $\Lambda\colon \mathcal{S}_+(E) \longmapsto \mathcal{S}(E)$. $\square$

Символами $\otimes_\mathfrak{p}$ і $\otimes_\mathfrak{e}$ ми будемо позначати поповнення алгебраїчного тензорного добутку $\otimes$ в проективній тензорній топології і в топології рівномірної збіжності на одностайно неперервних підмножинах відповідно.

Лема 2.2. *Справджуються наступні ізоморфізми $\mathcal{S}(E) \simeq E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}$ і $\mathcal{S}_+(E) \simeq E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$. Крім того, кожен елемент x з $\mathcal{S}(E)$ або $\mathcal{S}_+(E)$ може бути зображений, взагалі кажучи не єдиним чином, у вигляді абсолютно збіжного ряду*

$$x = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes \varphi_j, \qquad \lambda_j \in \mathbb{C}, \quad x_j \in E, \quad \varphi_j \in \mathcal{S} \text{ або } \mathcal{S}_+, \tag{3}$$

де $\sum_j |\lambda_j| < \infty$ і послідовності $\{\varphi_j\}$, $\{x_j\}$ збігаються до нуля у відповідних просторах.

Доведення. В роботі [10] доведено ізоморфізм $\mathcal{S}(E) \simeq E \otimes_{\mathfrak{e}} \mathcal{S}$. З ядерності простору $\mathcal{S}$ випливає ізоморфізм $E \otimes_{\mathfrak{e}} \mathcal{S} \simeq E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}$ (див. [7, IV, 9.4]). Тому, $\mathcal{S}(E) \simeq E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}$. Аналогічні міркування справджуються і для $\mathcal{S}_+(E)$, тому $\mathcal{S}_+(E) \simeq E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$. З теореми [7, III.6.4] про зображення елементів проективного тензорного добутку просторів Фреше випливає, що кожен елемент $x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}$ (або $x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$) можна записати у формі (3). □

3 Функціональне числення

Нехай $\mathfrak{D}(A^\infty) := \bigcap_{\alpha\in\mathbb{Z}_+} \mathfrak{D}(A^\alpha)$, де $\mathfrak{D}(A^\alpha)$ — область визначення оператора A^α. Відомо [4, теорема 5.17], що для аналітичної напівгрупи підпростір в $\mathfrak{D}(A^\infty)$ цілих аналітичних векторів її генератора A щільний в E. Визначимо в $\mathfrak{D}(A^\infty)$ підпростір $\mathfrak{A}$ цілих аналітичних векторів поліноміального росту наступним чином $\mathfrak{A} := \bigcap_{t,\alpha} E_t^\alpha$, де $E_t^\alpha := \{(tA)^\alpha e^{\mathrm{i}tA} x \in E \colon x \in E, t \in \mathbb{R}_+, \alpha \in \mathbb{Z}_+\}$. Зауважимо, що цей простір служить областю визначення побудованого нижче функціонального числення. У доведенні наступної теореми ми використаємо схему доведення з [2, теореми 1.1, 1.2].

Теорема 3.1. *Нехай $e^{\mathrm{i}tA}$ — обмежена аналітична напівгрупа над комплексним банаховим простором E така, що її генератор A має обмежений обернений A^{-1}. Тоді простір $\mathfrak{A}$ цілих аналітичних векторів поліноміального росту щільний в E.*

Доведення. Нагадаємо відому теорему Ріхтера [9] (див. також [2, теорема 1.1]): якщо $\{\mathfrak{E}_k \colon k \in \mathbb{Z}_+\}$ — такі банахові простори, що кожне вкладення $\mathfrak{E}_{k+1} \hookrightarrow \mathfrak{E}_k$ неперервне і щільне, то вкладення $\bigcap_{k\in\mathbb{Z}_+} \mathfrak{E}_k \hookrightarrow \mathfrak{E}_0$ теж щільне.

В роботі [2, теорема 1.2] показано, що вкладення $\mathfrak{D}(A^\infty) \hookrightarrow E$ щільне в топології, визначеній зліченною системою норм $\|x\|_{\mathfrak{D}(A^\alpha)} = \sum_{0\le\beta\le\alpha} \|A^\beta x\|$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+$.

Оскільки $e^{\mathrm{i}tA}$ — аналітична напівгрупа, то $\ker e^{\mathrm{i}tA} = \{0\}$, $\forall t > 0$. З припущень теореми випливає $\ker A = \{0\}$. Тому оператори $e^{\mathrm{i}tA}$ і $(tA)^\alpha$ мають обернені $e^{-\mathrm{i}tA}$ і $(tA)^{-\alpha}$ відповідно. З обмеженості $e^{\mathrm{i}tA}$ і замкнутості $(tA)^{-\alpha}$ випливає, що E_t^α — банаховий простір відносно норми $\|x\|_{E_t^\alpha} := \|(tA)^{-\alpha} e^{-\mathrm{i}tA} x\|$, для довільних $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, $t \in \mathbb{R}_+$ і $x \in E_s^\alpha$.

Використовуючи комутативність операторів, для всіх $s < t$ і $\alpha < \beta$ отримаємо

$$\begin{aligned}
\|x\|_{E_t^\beta} &= \|(tA)^{-\beta} e^{-\mathrm{i}tA} x\| = \|(sA)^{-\alpha} e^{-\mathrm{i}sA} t^{-\beta} s^\alpha A^{-(\beta-\alpha)} e^{-\mathrm{i}(t-s)A} x\| \\
&\ge \frac{\|s^{-\alpha} t^\beta A^{\beta-\alpha} e^{\mathrm{i}(t-s)A}\| \|s^\alpha t^{-\beta} A^{-(\beta-\alpha)} e^{-\mathrm{i}(t-s)A} (sA)^{-\alpha} e^{-\mathrm{i}sA} x\|}{\|s^{-\alpha} t^\beta A^{\beta-\alpha} e^{\mathrm{i}(t-s)A}\|} \\
&\ge \frac{\|(sA)^{-\alpha} e^{-\mathrm{i}sA} x\|}{\sup_{t-s\in(0,\infty)} s^{-\alpha} t^\beta \|A^{\beta-\alpha} e^{\mathrm{i}(t-s)A}\|} = C^{-1} \|x\|_{E_s^\alpha}
\end{aligned}$$

де $C = s^{-\alpha} t^\beta \|A^{\beta-\alpha} e^{\mathrm{i}(t-s)A}\|$.

Доведемо, що E_t^α щільний в E для довільних $t > 0$ і $\alpha > 0$. Припустимо протилежне. Нехай існує ненульовий функціонал x' зі спряженого простору E' такий, що $\langle x', (tA)^\alpha e^{\mathrm{i}tA} x \rangle = 0$ для всіх $x \in \mathfrak{D}(A^\infty)$. Тоді

$$\langle x', (sA)^\beta e^{\mathrm{i}sA} x \rangle = \langle x', (tA)^\alpha e^{\mathrm{i}tA} [s^\beta t^{-\alpha} A^{\beta-\alpha} e^{\mathrm{i}(s-t)A}] x \rangle = 0$$

для всіх s, β таких, що $t < s$ і $\alpha < \beta$. Тому, з аналітичності і неперервності $e^{\mathrm{i}tA}$ випливає $\langle x', (tA)^\beta e^{\mathrm{i}tA} x \rangle \equiv 0$ для всіх $t \in \mathbb{R}_+$ і $\beta \in \mathbb{Z}_+$. Зокрема, $\langle x', x \rangle = 0$ для всіх $x \in \mathfrak{D}(A^\infty)$. Отже, з щільності $\mathfrak{D}(A^\infty)$ в E маємо $x' = 0$, що суперечить припущенню.

Із щільності $\mathfrak{D}(A^\infty)$ в E слідує, що вкладення $E_t^\beta \hookrightarrow E_s^\alpha$ неперервне для всіх $s < t$ і $\alpha < \beta$. Щільність E_t^β в E_s^α випливає з доведеної щільності $E_{t-s}^{\beta-\alpha}$ в E.

Таким чином, послідовність банахових просторів $\{\mathfrak{E}_k := E_k^k \colon k \in \mathbb{Z}_+\}$ задовольняє умови теореми Ріхтера. Звідси маємо, що підпростір $\mathfrak{A} = \bigcap_{k\in\mathbb{Z}_+} \mathfrak{E}_k$ щільний в E. □

Простір $\mathfrak{A}$ ми наділяємо топологією проективної границі $\mathfrak{A} \simeq \operatorname{lim\,pr} E_t^\alpha$ відносно щільних вкладень $E_t^\beta \hookrightarrow E_s^\alpha$, де $s < t$ і $\alpha < \beta$.

Нехай $\mathscr{L}(\mathfrak{A}, E) \subset \mathscr{L}(E)$ — простір необмежених лінійних операторів на E, які мають спільну область визначення $\mathfrak{A} \subset E$ і які діють неперервно з $\mathfrak{A} \simeq \operatorname{lim\,pr} E_s^\alpha$ в E. Наділимо простір $\mathscr{L}(\mathfrak{A}, E)$ сильною операторною топологією.

Зауважимо, що простір $\mathfrak{A}$ інваріантний відносно дії операторів $e^{\mathrm{i}tA}$, $t \in \mathbb{R}_+$. Дійсно, для всіх $x \in \mathfrak{D}(A^\infty)$ маємо $A^\beta e^{\mathrm{i}tA} x = e^{\mathrm{i}tA} A^\beta x$. Перетин образів операторів $\bigcap_t \mathfrak{R}(e^{\mathrm{i}tA})$ міститься в $\mathfrak{D}(A^\infty)$ [5, теорема X.53], тому $e^{\mathrm{i}tA} (t^\alpha A^\beta e^{\mathrm{i}sA}) x = t^\alpha A^\beta e^{\mathrm{i}(t+s)A} x$. Простір $\mathfrak{D}(A^\infty)$ щільний в E і оператори $e^{\mathrm{i}tA}$ обмежені, тому попередня рівність справджується для всіх $x \in E$. Звідси випливає коректність наступного означення. Комутантом напівгрупи $e^{\mathrm{i}tA}$ називається підалгебра $\{V \in \mathscr{L}(\mathfrak{A}, E) \colon e^{\mathrm{i}tA} \circ V = V \circ e^{\mathrm{i}tA}, \forall t \in \mathbb{R}_+\}$.

Теорема 3.2. *Відображення $\Phi \colon \widehat{\mathcal{S}'_+} \ni \widehat{f} \longmapsto \widehat{f}(A) \in \mathscr{L}(\mathfrak{A}, E)$, де оператор $\widehat{f}(A)$ визначений за формулою*

$$\widehat{f}(A) x = \langle f(t), e^{\mathrm{i}tA} x \rangle, \qquad f \in \mathcal{S}'_+, \quad x \in \mathfrak{A}, \tag{4}$$

є неперервним гомоморфізмом з мультиплікативної алгебри аналітичних функцій $\widehat{\mathcal{S}'_+}$ на комутант в $\mathscr{L}(\mathfrak{A}, E)$ обмеженої напівгрупи $e^{\mathrm{i}tA}$. Оператори з образу $\Phi[\widehat{\mathcal{S}'_+}]$ задовольняють рівності

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(A) &= \widehat{f}(A) \circ \widehat{g}(A), && f, g \in \mathcal{S}'_+, \\
\widehat{\partial^\alpha f}(A) &= (-A)^\alpha \circ \widehat{f}(A), && f \in \mathcal{S}'_+, \alpha \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned} \tag{5}$$

і $\widehat{\delta}_0(A) = I$ — одиничний оператор над $\mathfrak{A}$.

Доведення. Нехай $\|e^{\mathrm{i}tA}\|_{\mathscr{L}(E)} \le M$ для всіх $t \in \mathbb{R}_+$. Перевіримо, що формула (4) є коректно визначена. Розглянемо E-значні функції

$$\omega_x \colon \mathbb{R}_+ \ni t \longmapsto e^{\mathrm{i}tA} x, \qquad x \in \mathfrak{A}.$$

З [5, теорема X.53] випливає, що для кожної обмеженої аналітичної напівгрупи e^{itA} існує така константа $M_0 > 0$, що нерівність

$$\left\|t^\alpha \partial^\alpha e^{itA}x\right\| = \left\|(tA)^\alpha e^{itA}x\right\| \leq MM_0\|x\|, \qquad t \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+, \tag{6}$$

справджується для всіх $x \in \mathfrak{A}$. Звідси

$$\|\omega_x\|_{\mathcal{S}_+^\alpha(E)} = \sup_{\beta \leq \alpha,\, t \in \mathbb{R}_+} \left\|t^\alpha \partial^\beta e^{itA}x\right\| \leq C \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \left\|(tA)^\alpha e^{itA}x\right\| \leq CMM_0\|x\|, \tag{7}$$

де $C = \left\|A^{\beta-\alpha}\right\|_{\mathscr{L}(E)}$ і $A^{\beta-\alpha}$ позначає обернений оператор до $A^{\alpha-\beta}$. Тому норми $\|\omega_x\|_{\mathcal{S}_+^\alpha(E)}$ скінченні для всіх $\alpha \in \mathbb{Z}_+$. Отже, $\omega_x \in \mathcal{S}_+(E)$ для всіх $x \in \mathfrak{A}$.

З ядерності простору $\mathcal{S}$ випливає (див. [7, IV, 9.4, наслідок 1]) ізоморфізм $E \otimes_\mathfrak{p} \mathcal{S} \simeq \mathscr{L}(\mathcal{S}', E)$. Тому з леми 2.2 отримуємо $\mathcal{S}(E) \simeq \mathscr{L}(\mathcal{S}', E)$. За лемою 2.1 існує неперервне лінійне розширення $\Lambda\colon \mathcal{S}_+(E) \longrightarrow \mathcal{S}(E)$. Оскільки вкладення $\mathcal{S}_+' \hookrightarrow \mathcal{S}'$ топологічне, то з рівності $\mathcal{S}(E) \simeq \mathscr{L}(\mathcal{S}', E)$ випливає, що оператор

$$\mathcal{S}_+' \ni f \longmapsto \langle f, \Lambda \circ \omega_x \rangle \in E, \qquad x \in \mathfrak{A}, \tag{8}$$

належить $\mathscr{L}(\mathcal{S}_+', E)$. Перевіримо його незалежність від Λ. За лемою 2.2 існує розвинення в ряд $\omega_x = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_j y_j \otimes \psi_j$, де $y_j \in E$ і $\psi_j \in \mathcal{S}_+$. З абсолютної збіжності цього ряду в $\mathcal{S}_+(E)$ та неперервності Λ отримуємо $\Lambda \circ \omega_x = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_j y_j \otimes \Lambda_c \psi_j$, де Λ_c позначає класичний оператор розширення з [11], який є звуженням оператора Λ на скалярні функції. З іншого боку маємо $\langle f, \psi_j \rangle = \langle f, \Lambda_c \psi_j \rangle$, оскільки носій розподілу f зосереджений в $\mathbb{R}_+$. Звідси випливає незалежність означення (8) від Λ. Таким чином формула (4) однозначно визначає лінійний оператор $\widehat{f}(A)x = \langle f, \omega_x \rangle$, який відображає $x \in \mathfrak{A}$ в E.

Оскільки $\omega_x \in \mathcal{S}_+(E)$ для всіх $x \in \mathfrak{A}$, то для кожного $f \in \mathcal{S}_+'$ і $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ існує така константа K, що $\|\langle f, \omega_x \rangle\| \leq K \|\omega_x\|_{\mathcal{S}_+^\alpha(E)}$, $x \in \mathfrak{A}$. Звідси та з нерівності (7) отримуємо $\widehat{f}(A) \in \mathscr{L}(\mathfrak{A}, E)$. Остаточно неперервність Φ випливає з неперервності $L\colon \mathcal{S}_+' \longrightarrow \widehat{\mathcal{S}_+'}$.

Перевіримо, що Φ — алгебраїчний гомоморфізм. Нехай $g \in \mathcal{S}_+'$ — регулярний розподіл. З властивостей інтеграла Бохнера отримуємо

$$\widehat{f * g}(A)x = \left\langle (f * g)(u), e^{iuA}x \right\rangle\Big|_{u=t+s} = \left\langle f(t), e^{itA} \left\langle g(s), e^{isA}x \right\rangle \right\rangle = \left[\widehat{f}(A) \circ \widehat{g}(A)\right] x, \quad \forall x \in \mathfrak{A}.$$

З комутативності згортки в $\mathcal{S}_+'$ випливає $\widehat{f}(A) \circ \widehat{g}(A) = \widehat{g}(A) \circ \widehat{f}(A)$ для регулярного розподілу g. Наближаючи довільний розподіл $g \in \mathcal{S}_+'$ регулярними і використовуючи неперервність відображення $\Phi \circ L$ з $\mathcal{S}_+'$ в $\mathscr{L}(\mathfrak{A}, E)$, отримаємо потрібну властивість.

Доведемо другу з рівностей (5). Оскільки $A^\alpha e^{itA}x = e^{itA}A^\alpha x$ для всіх $x \in \mathfrak{A}$, то

$$\begin{aligned}\widehat{\partial^\alpha f}(A)x = \left\langle \partial^\alpha f(t), e^{tA}x \right\rangle &= (-1)^\alpha \left\langle f(t), A^\alpha e^{tA}x \right\rangle \\ &= (-1)^\alpha \left\langle f(t), e^{tA}A^\alpha x \right\rangle = \widehat{f}(A)(-A)^\alpha x = (-A)^\alpha \widehat{f}(A)x.\end{aligned}$$

Для функціоналу Дірака $\delta_t \in \mathcal{S}_+'$ маємо $\widehat{\delta_t}(A)x = e^{itA}x$ для всіх $x \in \mathfrak{A}$. Отже, $\widehat{f}(A) \circ e^{itA} = e^{itA} \circ \widehat{f}(A)$ для всіх $f \in \mathcal{S}_+'$ і $t \in \mathbb{R}_+$. Навпаки, нехай $K \in \mathscr{L}(\mathfrak{A}, E)$ — довільний оператор з властивістю $K \circ \widehat{\delta_t}(A) = \widehat{\delta_t}(A) \circ K$ для всіх $t \in \mathbb{R}_+$. Зауважимо, що для всіх $x \in \mathfrak{A}$ маємо $Kx = K\widehat{\delta_0}(A)x$. Підставляючи t замість 0 і використовуючи попередню властивість, отримаємо $K \circ \widehat{\delta_t}(A) = \widehat{\delta_t}(A) \circ K$. Отже, образ відображення Φ співпадає з комутантом напівгрупи $\widehat{\delta_t}(A) = e^{itA}$ в $\mathscr{L}(\mathfrak{A}, E)$. □

Література

1. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979. — 318 с.
2. Горбачук В.И., Князюк А.В. *Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений* // Успехи мат. наук. — 1989. — Т. 44, вып. 3. — С. 55–91.
3. Жаринов В.В. *Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS* // Успехи мат. наук. — 1979. — Т. 34, вып. 4. — С. 97–131.
4. Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б. Однопараметрические полугруппы. — М.: Мир, 1992. — 351 с.
5. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.2. Гармонический анализ. Самосопряженность. — М.: Мир, 1978. — 393 с.
6. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962. — 830 с.
7. Шефер Х. Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971. — 360 с.
8. Haase M. The functional calculus for sectorial operators, Operator Theory: Advances and Applications, Basel: Birkhäser-Verlag, 2006, 392 p.
9. Richter P., Unitary representations of countable inifinite dimensional Lie group, Leipzig: Karl Marx Univesität, 1977. — Mph 5. — 7 p.
10. Schwartz L. *Espaces de fonctions différentielles à valeurs vectorielles*, J. Anal. Math., **4** (1954/55), 88–148.
11. Seeley R.T. *Extensions of C^∞-functions defined in a half-space*, Proc. Amer. Math. Soc., **15** (1964), 625–626.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

Надійшло 20.02.2012

Lopushansky O.V., Sharyn S.V. *Functional calculus for generators of analytic semigroups of operators*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 83–89.

We construct a functional calculus for generators of one-parameter bounded analytic semigroups of operators on a Banach space. The calculus symbol class consist of the Laplace image of the convolution algebra $\mathcal{S}_+'$ of tempered distributions with supports in $[0, \infty)$. Domain of constructed calculus is dense in the Banach space.

Лопушанский О.В., Шарин С.В. *Функциональное исчисление для генераторов аналитических полугрупп операторов* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 83–89.

Мы строим функциональное исчисление для генераторов однопараметрических ограниченных аналитических полугрупп операторов, действующих в банаховом пространстве. Класс символов такого исчисления состоит из образов преобразования Лапласа сверточной алгебры $\mathcal{S}_+'$ медленно растущих распределений с носителями в $[0, \infty)$. Область определения построенного исчисления плотна в банаховом пространстве.

Карпатські математичні публікації. Т.4, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №1

УДК 517.956.225 + 517.956.8

Мельник Т.А., Наквасюк Ю.А.

УСЕРЕДНЕННЯ ПАРАБОЛІЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ СІНЬОРІНІ В ГУСТОМУ З'ЄДНАННІ ТИПУ 3:2:1

Мельник Т.А., Наквасюк Ю.А. *Усереднення параболічної крайової задачі Сіньоріні в густому з'єднанні типу 3:2:1* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — С. 90–110.

Розглядається параболічна крайова задача Сіньоріні в густому з'єднанні Ω_ε, яке є об'єднанням деякої області Ω_0 та великої кількості ε-періодично розташованих тонких криволінійних циліндрів. На бічних поверхнях циліндрів задані умови Сіньоріні. Вивчено асимптотичну поведінку розв'язку такої задачі коли $\varepsilon \to 0$, тобто коли кількість тонких циліндрів необмежено зростає, а їхня товщина прямує до нуля. За допомогою методу інтегральних тотожностей доведено теорему збіжності та показано, що умови Сіньоріні трансформуються (при $\varepsilon \to 0$) в диференціальні нерівності в області, що заповнюється тонкими циліндрами.

Вступ

Багатомасштабне моделювання та чисельний аналіз є новою областю сучасних досліджень, що надзвичайно широко розвивається, і в майбутньому матиме великий вплив на обчислювальну науку та прикладну математику. Це пов'язано з перспективою розвитку більш ефективних методів, які мають бути поєднанням нового класу чисельних і аналітичних прийомів моделювання. Одним із таких класів задач багатомасштабного моделювання є крайові задачі в сингулярно збурених областях. Існує багато типів збурених областей, які потребують різних методів дослідження.

В роботі розглянуто крайову задачу в сингулярно збуреній області, а саме в густому з'єднанні типу 3:2:1. Густим з'єднанням типу $k:p:d$ називається область в $\mathbb{R}^n$, яка складається із деякої області (тіло густого з'єднання) та великої кількості тонких областей, що ε-періодично розташовані вздовж деякої множини (зона приєднання) на межі тіла густого з'єднання. Тип $k:p:d$ густого з'єднання відповідає граничним розмірностям ($\varepsilon \to 0$) тіла з'єднання, зони приєднання та кожної з приєднаних тонких областей відповідно.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35B27, 35R45, 35J20, 74K30.

Ключові слова і фрази: усереднення, густе з'єднання, крайові умови Сіньоріні.

Останнім часом крайові задачі в густих з'єднаннях інтенсивно досліджуються ([7]–[11], [14], [24]–[26]), оскільки такі з'єднання є прототипами багатьох сучасних інженерних конструкцій, таких як мікро-електромеханічні системи, а також багато інших фізичних та біологічних систем з дуже відмінними характерними розмірами і складною структурою. Так, в енергозберігаючих технологіях очистки води від шкідливих органічних домішок почали використовувати густі абсорбери (поглиначі), які мають форму густих з'єднань ([17]).

Незважаючи на величезний прогрес обчислювальних засобів, неможливо знайти прийнятні чисельні розв'язки крайових задач в таких областях, оскільки збільшення кількості компонент для густої мультиструктури природно приводить до суттєвого збільшення часу обчислень та істотно ускладнює підтримання прийнятого рівня точності. Таким чином, важливою задачею прикладної математики є асимптотичний аналіз крайових задач в таких областях. Метою цього аналізу є розробка строгих асимптотичних методів для крайових задач в густих з'єднаннях різних типів. Їх суть полягає у вивчені асимптотичної поведінки розв'язку задачі, коли кількість компонент густого з'єднання необмежено зростає, а їх товщина прямує до нуля. Асимптотичні методи дають обгрунтовану можливість замінити складні моделі більш простішими і вже далі проводити чесельний аналіз для простішої задачі (див., наприклад, [26]).

Крайові задачі в густих з'єднаннях при прямуванні до нуля параметра збурення ε мають свої специфічні труднощі. Як показано в роботі [31], крайові задачі в густих з'єднаннях втрачають коерцитивність при $\varepsilon \to 0$, що значною мірою ускладнює асимптотичні дослідження. Зауважимо, що першими роботами в цьому напрямку були роботи [3]–[5], в яких вивчена асимптотична поведінка функції Ґріна задачі Неймана для рівняння Гельмгольца в необмеженому густому з'єднанні. В роботах [18]–[21], [27]–[30] дана класифікація густих з'єднань, розроблено строгі асимптотичні методи дослідження основних крайових задач математичної фізики в густих сингулярно вироджувальних з'єднаннях різних типів, побудовано перші члени асимптотики та доведено асимптотичні оцінки, вивчено вплив крайових умов, які задаються на межах густих з'єднань, та геометричної конфігурації густих з'єднань на асимптотичну поведінку розв'язків.

В даній роботі у густому з'єднанні розглядається крайова задача Сіньоріні. Вперше така задача, відома тепер як задача Сіньоріні, була поставлена самим Сіньоріні у [35]. Суть такої крайової задачі полягає в тому, що на межі області можливе виконання двох крайових умов Діріхле або Неймана, і наперед не відомо на яких частинах межі задаються ці умови. Математично така ситуація описується наступними співвідношеннями:

$$\left.\begin{array}{r} u \le g, \quad \partial_\nu u \le d, \\ (u-g)\,(\partial_\nu u - d) = 0 \end{array}\right\} \quad \text{на} \quad \partial\Omega.$$

В роботі [35] автор їх називає "сумнівні крайові умови", оскільки апріорі невідомо, яка із двох умов і де виконується. Згодом ці умови стали називати умовами Сіньоріні. Крайові задачі зустрічаються в теорії розповсюдження тріщин в пружних середовищах, в теорії оптимального керування, гідрогеології, метеорології, теорії пластичності (див. [2], [6]). Цікаві асимптотичні властивості виявлено при дослідженні крайових задач Сіньоріні в перфорованих областях (див. [1], [32]).

В даній роботі розглядається параболічна крайова задача у густому з'єднанні Ω_ε, яке є об'єднанням деякої області Ω_0 та великої кількості тонких криволінійних циліндрів, на бічних поверхнях яких задано однорідні крайові умови Сіньоріні. Зауважимо, що еліптичні задачі Сіньоріні в густих з'єднаннях типу 2:1:1 та 3:2:1 були досліджені в роботах ([16], [26]).

Структура роботи виглядає наступним чином. Постановка задачі описана в першому розділі. В розділі 2 сформульовано основний результат та обговорено основні твердження і деякі елементи доведення теореми збіжності. Різні означення узагальненого розв'язку початкової та усередненої задач сформульовані в розділі 3. Також в ньому отримані існування та єдиність цих розв'язків та певні їх властивості. В четвертому розділі ми отримаємо апріорні рівномірні оцінки для узагальненого розв'язку початкової задачі. Основна теорема збіжності доведена в останньому розділі.

1 Постановка задачі

Нехай a та h — додатні дійсні числа, N — велике натуральне число, $\varepsilon = \frac{a}{N}$.

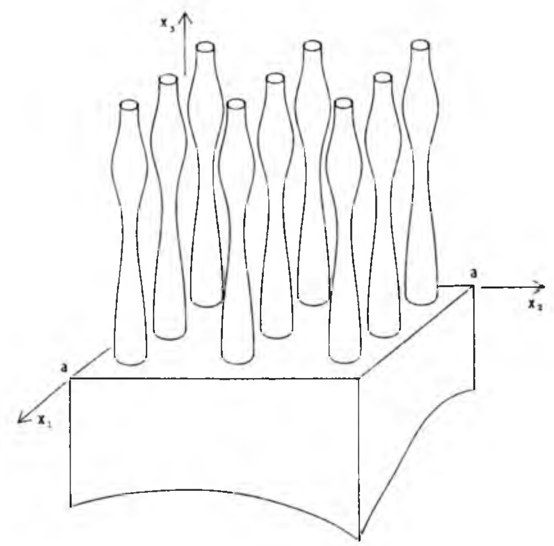


Рис. 1: Модельне густе з'єднання типу 3:2:1.

Розглянемо модельне густе з'єднання Ω_ε (див. рис. 1) типу $3:2:1$, яке складається з тіла $\Omega_0 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x' = (x_1, x_2) \in \Xi_0 = (0, a) \times (0, a), -\gamma(x') < x_3 < 0\}$ та великої кількості тонких криволінійних циліндрів $G_\varepsilon = \bigcup_{i,j=0}^{N-1} G_\varepsilon(i, j)$,

$$G_\varepsilon(i, j) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \ 0 < x_3 < h, \quad \left(\frac{x_1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} - i\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\varepsilon} - \frac{1}{2} - j\right)^2 < \varrho^2(x_3) \right\}, \qquad (1)$$

де задані функції γ та ϱ — гладкі та додатні на $[0, a] \times [0, a]$ та $[0, h]$ відповідно. Крім того, $0 < \varrho < \frac{1}{2}$. Очевидно, що тонкі криволінійні циліндри заповнюють паралелепіпед $\Omega^+ = \Xi_0 \times (0, h)$ в граничному переході при $N \to +\infty$ (або $\varepsilon \to 0$).

Зауваження 1.1. *Можна також розглядати більш загальний випадок криволінійних циліндрів*

$$G_\varepsilon(i, j) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \quad 0 < x_3 < h, \quad (\varepsilon^{-1} x_1 - i, \varepsilon^{-1} x_2 - j) \in \omega(x_3)\}, \qquad (2)$$

де $\omega(x_3)$ – плоска область, що належить внутрішності квадрата $\{\xi' = (\xi_1, \xi_2) : 0 < \xi_1 < 1, 0 < \xi_2 < 1\}$ для всіх $x_3 \in [0, h]$, та така, що поверхня $\{(\xi', x_3) : \xi' \in \partial\omega, \ x_3 \in [0, h]\}$ — гладка.

В області Ω_ε розглядається наступна крайова задача:

$$\begin{array}{rcll} u'_\varepsilon(x, t) & = & \Delta_x u_\varepsilon(x, t) + f(x, t), & (x, t) \in \Omega_\varepsilon \times (0, T), \\ u_\varepsilon(x, t) \le 0, & & \partial_\nu u_\varepsilon(x, t) \le 0, & (x, t) \in S_\varepsilon \times (0, T), \\ u_\varepsilon(x, t)\, \partial_\nu u_\varepsilon(x, t) & = & 0, & (x, t) \in S_\varepsilon \times (0, T), \\ u_\varepsilon(x, t) & = & 0, & (x, t) \in \Gamma_\varepsilon \times (0, T), \\ \partial_\nu u_\varepsilon(x, t) & = & 0, & (x, t) \in \big(\partial\Omega_\varepsilon \setminus (S_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon)\big) \times (0, T), \\ u_\varepsilon(x, 0) & = & 0, & x \in \Omega_\varepsilon \times \{t = 0\}, \end{array} \qquad (3)$$

де $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial \nu}$ — зовнішня нормальна похідна, $u'_\varepsilon := \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}$, S_ε — об'єднання бічних поверхонь тонких циліндрів, а Γ_ε — об'єднання верхніх основ циліндрів G_ε при $x_3 = h$.

Задана функція f належить простору $L^2(\Omega_1 \times (0, T))$, припускаємо, що для неї існує слабка похідна f' така, що

$$f' \in L^2(\Omega_1 \times (0, T)), \qquad (4)$$

де $\overline{\Omega_1} = \overline{\Omega_0} \cup \overline{\Omega^+}$, $\Omega^+ = \Xi_0 \times (0, h)$, $\Xi_0 = \{x : \ x' = (x_1, x_2) \in (0, a) \times (0, a), \quad x_3 = 0\}$. Будемо також використовувати позначення $\Xi_h = \{x : \ x' \in (0, a) \times (0, a), \quad x_3 = h\}$.

Відомо, що для кожного фіксованого значення ε існує єдиний узагальнений розв'язок u_ε задачі (3) (див. підрозділ 3.1). Нашою метою є вивчення асимптотичної поведінки узагальненого розв'язку u_ε задачі (3) при $\varepsilon \to 0$, тобто, коли число тонких криволінійних циліндрів необмежено зростає, а їх товщина прямує до нуля.

2 Формулювання основного результату та його обговорення

Позначимо через $\widetilde{u}$ продовження нулем функції u на паралелепіпед $\Omega^+ = \Xi_0 \times (0, h) \times (0, T)$, який заповнюється тонкими криволінійними циліндрами при $\varepsilon \to 0$, а саме

$$\widetilde{u}(x, t) = \begin{cases} u(x, t), & (x, t) \in G_\varepsilon \times (0, T), \\ 0, & (x, t) \in \big(\Omega^+ \setminus G_\varepsilon\big) \times (0, T). \end{cases} \qquad (5)$$

Нехай $\zeta(x_3) = \frac{l_\omega(x_3)}{|\omega(x_3)|}$, $\omega(x_3) = \left\{\xi' \in \mathbb{R}^2 : (\xi_1 - \frac{1}{2})^2 + (\xi_2 - \frac{1}{2})^2 < \varrho^2(x_3)\right\}$, де $|\omega(x_3)|$ — площа $\omega(x_3)$, а $l_\omega(x_3)$ — довжина $\partial\omega(x_3)$ для кожного фіксованого $x_3 \in [0, h]$.

Також визначимо характеристичну функцію

$$\chi_{G_\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1, & x \in G_\varepsilon, \\ 0, & x \in \Omega^+ \setminus G_\varepsilon. \end{cases}$$

Відомо (див. [24]), що $\chi_{G_\varepsilon} \xrightarrow{w} |\omega|$ слабко в $L^2(\Omega^+)$ при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 1. *Послідовність розв'язків u_ε задачі (3) задовольняє співвідношення:*

$$\left.\begin{array}{llll} u_\varepsilon\,|_{\Omega_0} \xrightarrow{w} u_0^- & \text{слабко в} & H^1(\Omega_0\times(0,T)), & \\ \widetilde{u_\varepsilon} \xrightarrow{w} |\omega(x_3)|\,u_0^+ & \text{слабко в} & L^2(0,T;L^2(\Omega^+)), & \\ \widetilde{\partial_{x_3}u_\varepsilon} \xrightarrow{w} |\omega(x_3)|\,\partial_{x_3}u_0^+ & \text{слабко в} & L^2(0,T;L^2(\Omega^+)), & \\ \widetilde{\partial_{x_i}u_\varepsilon} \xrightarrow{w} 0 & \text{слабко в} & L^2(0,T;L^2(\Omega^+)), & (i=1,\,2) \\ \widetilde{\partial_t u_\varepsilon} \xrightarrow{w} |\omega(x_3)|\,\partial_t u_0^+ & \text{слабко в} & L^2(\Omega^+\times(0,T)), & \end{array}\right\}\ \text{при}\quad \varepsilon\to 0. \tag{6}$$

та функція

$$u_0(x,t)=\begin{cases} u_0^-, & (x,t)\in\Omega_0\times(0,T),\\ u_0^+, & (x,t)\in\Omega^+\times(0,T)\end{cases} \tag{7}$$

є єдиним розв'язком такої крайової задачі

$$\begin{cases} \partial_t u_0^-(x,t)-\Delta_x u_0^-(x,t)=f(x,t), & (x,t)\in\Omega_0\times(0,T),\\ |\omega(x_3)|\,\partial_t u_0^+(x,t)-\partial_{x_3}\big(|\omega(x_3)|\,\partial_{x_3}u_0^+(x,t)\big)\le|\omega(x_3)|f(x,t), & (x,t)\in\Omega^+\times(0,T),\\ u_0^+(x,t)\le 0, & (x,t)\in\Omega^+\times(0,T),\\ u_0^+\big(-|\omega|\,\partial_t u_0^+ +\partial_{x_3}\big(|\omega|\,\partial_{x_3}u_0^+\big)+|\omega|\,f\big)=0, & (x,t)\in\Omega^+\times(0,T).\\ u_0^-(x',0,t)=u_0^+(x',0,t), & (x',0,t)\in\Xi_0\times(0,T),\\ \partial_{x_3}u_0^-(x',0,t)=|\omega(0)|\,\partial_{x_3}u_0^+(x',0,t), & (x',0,t)\in\Xi_0\times(0,T),\\ \partial_\nu u_0^-(x,t)=0, & (x,t)\in\big(\partial\Omega_0\setminus\Xi_0\big)\times(0,T),\\ u_0^+(x',h,t)=0, & (x',h,t)\in\Xi_h\times(0,T),\\ u_0(x,0,t)=0, & x\in\Omega_1, \end{cases} \tag{8}$$

яку будемо називати усередненою задачею для задачі (3).

2.1 Обговорення

Результати, наведені вище, показують, що крайові умови істотньо впливають на асимптотичну поведінку розв'язку задачі (3). А саме, ми бачимо, що умови Сіньоріні $u_\varepsilon\le 0$, $\partial_\nu u_\varepsilon\le 0$, $u_\varepsilon\,\partial_\nu u_\varepsilon=0$ на бічних поверхнях S_ε криволінійних циліндрів та параболічне рівняння $u_\varepsilon'=\Delta_x u_\varepsilon+f$ в $G_\varepsilon\times(0,T)$ трансформуються (при $\varepsilon\to 0$) в наступне поточкове одностороннє обмеження $u_0^+(x,t)\le 0$ та диференціальну нерівність

$$|\omega(x_3)|\,\partial_t u_0^+(x,t)-\partial_{x_3}\big(|\omega(x_3)|\,\partial_{x_3}u_0^+(x,t)\big)\le|\omega(x_3)|\,f(x,t)$$

для кожного $(x,t)\in\Omega^+\times(0,T)$, які пов'язані між собою співвідношенням

$$u_0^+(x,t)\big(-|\omega(x_3)|\,\partial_t u_0^+(x,t)+\partial_{x_3}\big(|\omega(x_3)|\,\partial_{x_3}u_0^+(x,t)\big)+|\omega(x_3)|\,f(x,t)\big)=0\quad\text{в}\quad\Omega^+\times(0,T).$$

Для доведення даної теореми ми використовуємо інтегральний метод розвинений в [19, 21, 24], суть якого полягає в застосуванні спеціальних нерівностей в граничному випадку та доведенні рівномірних оцінок. Для нашої задачі — це нерівність (28).

Як було показано в [12, 13] для усереднення параболічних задач в перфорованих областях потрібно вимагати додаткові припущення на початкові умови параболічної задачі (див. також [33]). Подібна ситуація зберігається для параболічних задач в густих з'єднаннях. Для нашої задачі — це додаткова умова (4), за допомогою якої ми покажемо (див. підрозділ 3.1), що

$$\partial_t u_\varepsilon\in L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon))\cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)).$$

Далі використовуючи метод штрафу, отримаємо рівномірну оцінку для $\|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))}$ відносно параметра ε (див. розділ 4). На основі цієї оцінки та інших оцінок ми переходимо до границі в варіаційній нерівності (13), що відповідає задачі (3) та отримуємо варіаційну нерівність (26), що відповідає усередненій задачі (8).

3 Означення узагальнених розв'язків, їх існування та єдиність

3.1 *Існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі (3)*

Нехай $\langle\cdot,\cdot\rangle_\varepsilon$ — дужки спряження між простором $H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon)=\{u\in H^1(\Omega_\varepsilon):\ u_{|\Gamma_\varepsilon}=0\}$ та спряженим до нього $(H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon))^*$. Припустимо, що існує класичний розв'язок задачі (3). Домноживши рівняння задачі (3) на функцію u_ε, проінтегрувавши частинами в Ω_ε та використавши крайові умови для u_ε, отримаємо таку рівність

$$\langle u_\varepsilon',u_\varepsilon\rangle_\varepsilon+\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla u_\varepsilon\,dx=\int\limits_{\Omega_\varepsilon}f\,u_\varepsilon\,dx. \tag{9}$$

Розглянемо наступні функціональні простори

$$W^\varepsilon(0,T)=\{v\in L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon)),\quad \exists v'\in L^2(0,T;(H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon))^*)\},$$

$$W_0^\varepsilon(0,T)=\{v\in W^\varepsilon(0,T):\quad v(\cdot,0)=0\}.$$

Зауваження 3.1. *З огляду на твердження 1.2 ([34], с. 106) простір $W^\varepsilon(0,T)$ вкладається в простір $C([0,T];L^2(\Omega_\varepsilon))$, тому рівність $v(\cdot,0)=0$ має сенс.*

Також визначимо такі функціональні множини

$$K_\varepsilon=\{v\in H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon):\quad v|_{S_\varepsilon}\le 0\quad\text{на}\quad S_\varepsilon\},$$

$$\mathcal{K}_\varepsilon=\{v\in W^\varepsilon(0,T):\quad v(\cdot,t)\in K_\varepsilon\quad\text{для майже всіх}\quad t\in(0,T)\},$$

$$\mathcal{K}_\varepsilon^0=\{v\in W_0^\varepsilon(0,T):\quad v(\cdot,t)\in K_\varepsilon\quad\text{для майже всіх}\quad t\in(0,T)\},$$

де $v|_S$ позначає слід функції v на поверхні S.

Очевидно, що K_ε — замкнена та опукла множина в $H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon)$.

Домножимо рівняння задачі (3) на довільну функцію $\varphi\in K_\varepsilon$ та проінтегруємо в Ω_ε. Аналогічно як це було зроблено раніше, використавши крайові умови, отримаємо

$$\langle u_\varepsilon',\varphi\rangle_\varepsilon+\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla\varphi\,dx=\int\limits_{\Omega_\varepsilon}f\,\varphi\,dx+\int\limits_{S_\varepsilon}\partial_\nu u_\varepsilon\,\varphi\,d\sigma. \tag{10}$$

Оскільки $\partial_\nu u_\varepsilon \le 0$ та $\varphi \le 0$ м. с. на $S_\varepsilon \times (0,T)$, то $\int_{S_\varepsilon} \partial_\nu u_\varepsilon\, \varphi\, d\sigma \ge 0$. Використовуючи останню нерівність, з рівності (10) отримаємо, що

$$\langle u_\varepsilon', \varphi\rangle_\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla\varphi\, dx \ge \int_{\Omega_\varepsilon} f\,\varphi\, dx. \tag{11}$$

Означення 3.1. *Узагальненим розв'язком задачі* (3) *називається функція* $u_\varepsilon \in \mathcal{K}_\varepsilon^0$, *яка задовольняє рівність* (9) *та нерівність* (11) *для майже всіх* $t \in (0,T)$ *та для довільної функції* $\varphi \in K_\varepsilon$.

Означення 3.2. *Узагальненим розв'язком задачі* (3) *називається функція* $u_\varepsilon \in \mathcal{K}_\varepsilon^0$, *яка задовольняє нерівність*

$$\langle u_\varepsilon', \varphi - u_\varepsilon\rangle_\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla(\varphi - u_\varepsilon)\, dx \ge \int_{\Omega_\varepsilon} f(\varphi - u_\varepsilon)\, dx \tag{12}$$

для майже всіх $t \in (0,T)$ *та для довільної функції* $\varphi \in K_\varepsilon$, *або, що еквівалентно, наступну нерівність*

$$\int_0^T \langle u_\varepsilon', \varphi - u_\varepsilon\rangle_\varepsilon dt + \int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla(\varphi - u_\varepsilon)\, dx\, dt \ge \int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon} f(\varphi - u_\varepsilon)\, dx\, dt \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{K}_\varepsilon. \tag{13}$$

Покажемо, що означення 3.1 та 3.2 еквівалентні. Віднімаючи рівність (9) від нерівності (11), отримаємо (12). Взявши $\varphi \equiv 0$ в (12), маємо, що

$$\langle u_\varepsilon', u_\varepsilon\rangle_\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon\, dx \le \int_{\Omega_\varepsilon} f\, u_\varepsilon\, dx. \tag{14}$$

Поклавши $\varphi = 2u_\varepsilon$ в (12), ми одержимо обернену нерівність

$$\langle u_\varepsilon', u_\varepsilon\rangle_\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon\, dx \ge \int_{\Omega_\varepsilon} f\, u_\varepsilon\, dx. \tag{15}$$

Отже, (9) виконується. Взявши $\varphi = \psi + u_\varepsilon$ в (12), де ψ довільна функція з K_ε, маємо (11). Очевидно, що наступний функціонал

$$\int_0^T \langle F, v\rangle_\varepsilon\, dt := \int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon} f\, v\, dx\, dt, \quad v \in L^2(0,T; H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)),$$

належить простору $L^2(0,T; (H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon))^*)$. Крім того, на підставі (4) існує узагальнена похідна F', така що

$$F' \in L^2(0,T; (H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon))^*) \quad \text{та} \tag{16}$$
$$\int_0^T \langle F', v\rangle_\varepsilon\, dt = \int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon} f'\, v\, dx\, dt, \quad v \in L^2(0,T; H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)).$$

Тепер легко переконатися, що всі умови (одна із них це є включення (16)) теореми 2.1 ([15, Глава 6]) для задачі (3) виконуються в сенсі означення 3.2, і як наслідок з цієї теореми задача (3) має єдиний розв'язок u_ε такий, що

$$u_\varepsilon, u_\varepsilon' \in L^2(0,T; H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon)) \cap L^\infty(0,T; L^2(\Omega_\varepsilon)).$$

3.2 Існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі (8)

Розглянемо частково анізотропний простір Соболєва

$$\mathcal{H}(\Omega_1; \Xi_h) = \{u \in L^2(\Omega_1) \big|\quad \partial_{x_3} u \in L^2(\Omega_1), \quad u|_{\Omega_0} \in H^1(\Omega_0), \quad u|_{\Xi_h} = 0\}.$$

З властивостей анізотропних просторів Соболєва (див. [36]) випливає, що сліди обмежень $u^+ := u|_{\Omega^+}$ та $u^- := u|_{\Omega_0}$ на Ξ_0 рівні. Крім того, оскільки сліди функцій з $\mathcal{H}(\Omega_1;\Xi_h)$ дорівнюють нулю на Ξ_h, існує стала C_0 така, що

$$\int_{\Omega_1} u^2\, dx \le C_0\Big(\int_{\Omega_0} |\nabla u^-|^2\, dx + \int_{\Omega^+} |\partial_{x_3} u^+|^2\, dx\Big) \quad \text{для всіх } u \in \mathcal{H}(\Omega_1;\Xi_h).$$

В просторі $\mathcal{H}(\Omega_1;\Xi_h)$ введемо норму $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, що породжена скалярним добутком

$$(u,v)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega_0} \nabla u^- \cdot \nabla v^-\, dx + \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)|\, \partial_{x_3} u^+\, \partial_{x_3} v^+\, dx, \quad u, v \in \mathcal{H}(\Omega_1, \Xi_h). \tag{17}$$

Також розглянемо простір $\mathcal{V}(\Omega_1) = L^2(\Omega_1)$ із скалярним добутком

$$(u,v)_{\mathcal{V}} = \int_{\Omega_0} u\, v\, dx + \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)|\, u\, v\, dx.$$

Очевидно, що вкладення $\mathcal{H}(\Omega_1,\Xi_h) \subset \mathcal{V}(\Omega_1)$ є щільним та неперервним. Тому ми можемо розглянути трійку просторів $\mathcal{H} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{H}^*$ з відповідними дужками спряження $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ між $\mathcal{H}$ та $\mathcal{H}^*$, де $\mathcal{H} := \mathcal{H}(\Omega_1,\Xi_h)$, $\mathcal{V} := \mathcal{V}(\Omega_1)$ та $\mathcal{H}^* := (\mathcal{H}(\Omega_1,\Xi_h))^*$.

Припустимо, що існує гладка функція u_0, що задовольняє співвідношення усередненої задачі (8). Домноживши рівняння задачі (8) на функцію u_0^-, проінтегрувавши по Ω_0 та використавши крайову умову на $\partial\Omega_0 \setminus \Xi_0$, знаходимо

$$\int_{\Omega_0} \partial_t u_0^- u_0^-\, dx + \int_{\Omega_0} \nabla u_0^- \cdot \nabla u_0^-\, dx = \int_{\Omega_0} f\, u_0^-\, dx - \int_{\Xi_0} \big(\partial_{x_3} u_0^-\, u_0^-\big)\big|_{x_3=0}\, dx'. \tag{18}$$

Проінтегрувавши четверте рівняння задачі (8) в Ω^+ та використавши крайову умову на Ξ_h, маємо

$$\begin{aligned} -\int_{\Xi_0} \big(|\omega(x_3)|\, \partial_{x_3} u_0^+\, u_0^+\big)\big|_{x_3=0}\, dx' + \int_{\Omega_+} |\omega(x_3)|\, \partial_t u_0^+\, u_0^+\, dx \\ + \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)|\, \partial_{x_3} u_0^+\, \partial_{x_3} u_0^+\, dx = \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)|\, f\, u_0^+\, dx. \end{aligned} \tag{19}$$

Додамо (18) та (19). Використовуючи умови спряження для u_0^+ та u_0^-, отримаємо

$$(\partial_t u_0, u_0)_{\mathcal{V}} + (u_0, u_0)_{\mathcal{H}} = (f, u_0)_{\mathcal{V}}. \tag{20}$$

Розглянемо наступні функціональні простори

$$\mathcal{W}(0,T) = \{v \in L^2(0,T;\mathcal{H}),\ \exists\, v' \in L^2(0,T;\mathcal{H}^*)\},$$

$$\mathcal{W}_0(0,T) = \{v \in \mathcal{W}(0,T): \quad v(\cdot,0) = 0\}.$$

Також визначимо такі функціональні множини

$$K_0 = \{v \in \mathcal{H}: \quad v \le 0 \quad \text{м. с. на} \quad \Omega^+\},$$

$$\mathcal{K}_0 = \{v \in \mathcal{W}(0,T): \quad v(\cdot,t) \in K_0 \quad \text{для майже всіх} \quad t \in (0,T)\},$$

$$\mathcal{K}_0^0 = \{v \in \mathcal{W}_0(0,T): \quad v(\cdot,t) \in K_0 \quad \text{для майже всіх} \quad t \in (0,T)\}.$$

Очевидно, що K_0 — замкнена та опукла в $\mathcal{H}(\Omega_1, \Xi_h)$.

Домножимо перше рівняння задачі (8) на φ з K_0 та проінтегруємо в Ω_0. Аналогічно, як описано вище, маємо

$$\int\limits_{\Omega_0} \partial_t u_0^- \varphi\, dx + \int\limits_{\Omega_0} \nabla u_0^- \cdot \nabla\varphi\, dx = \int\limits_{\Omega_0} f\,\varphi\, dx - \int\limits_{\Xi_0} (\partial_{x_3} u_0^- \varphi)\big|_{x_3=0}\, dx'. \tag{21}$$

Другу нерівність домножимо на φ та проінтегруємо по Ω^+. Оскільки $\varphi \le 0$, виводимо

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega^+} |\omega(x_3)| \partial_t u_0^+ \varphi\, dx + \int\limits_{\Omega^+} |\omega(x_3)|\, \partial_{x_3} u_0^+\, \partial_{x_3}\varphi\, dx& \\ \ge \int\limits_{\Xi_0} (|\omega(x_3)|\, \partial_{x_3} u_0^+ \varphi)\big|_{x_3=0}\, dx' + \int\limits_{\Omega^+} |\omega(x_3)|\, f\,\varphi\, dx.& \end{aligned} \tag{22}$$

Додавши (21) та (22) та використавши другу умову спряження на Ξ_h, маємо

$$(\partial_t u_0, \varphi)_{\mathcal{V}} + (u_0, \varphi)_{\mathcal{H}} \ge (f, \varphi)_{\mathcal{V}}. \tag{23}$$

Отже, класичний розв'язок усередненої задачі (8) задовольняє співвідношення (20) та (23). Використовуючи їх, ми можемо дати наступні означення узагальненого розв'язку задачі (8).

Означення 3.3. *Узагальненим розв'язком задачі (8) називається функція $u_0 \in \mathcal{K}_0^0$, яка задовольняє рівність*

$$\langle \partial_t u_0, u_0\rangle_0 + (u_0, u_0)_{\mathcal{H}} = (f, u_0)_{\mathcal{V}},$$

та нерівність

$$\langle \partial_t u_0, \varphi\rangle_0 + (u_0, \varphi)_{\mathcal{H}} \ge (f, \varphi)_{\mathcal{V}}$$

для майже всіх $t \in (0,T)$ та для довільної функції $\varphi \in K_0$.

Означення 3.4. *Узагальненим розв'язком задачі (8) називається функція $u_0 \in \mathcal{K}_0^0$, яка задовольняє нерівність*

$$\langle \partial_t u_0, \varphi - u_0\rangle_0 + (u_0, \varphi - u_0)_{\mathcal{H}} \ge (f, \varphi - u_0)_{\mathcal{V}} \tag{24}$$

для майже всіх $t \in (0,T)$ та для довільної функції $\varphi \in K_0$.

Аналогічно, як ми довели еквівалентність означень 3.1 та 3.2, можна показати еквівалентність означень 3.3 та 3.4. Наведемо ще одне означення.

Означення 3.5. *Узагальненим розв'язком задачі (8) називається функція $u_0 \in K_0^0$, яка задовольняє нерівність*

$$\langle \partial_t u_0, \varphi - u_0\rangle_0 + (\varphi, \varphi - u_0)_{\mathcal{H}} \ge (f, \varphi - u_0)_{\mathcal{V}} \tag{25}$$

для майже всіх $t \in (0,T)$ та для довільної функції $\varphi \in K_0$, або, що еквівалентно, наступну нерівність

$$\int\limits_0^T \langle \partial_t u_0, \varphi - u_0\rangle_0\, dt + \int\limits_0^T (\varphi, \varphi - u_0)_{\mathcal{H}}\, dt \ge \int\limits_0^T (f, \varphi - u_0)_{\mathcal{V}}\, dt, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{K}_0. \tag{26}$$

Щоб показати еквівалентність означень 3.4 та 3.5, додамо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_0} \nabla(\varphi - u_0^-) \cdot \nabla(\varphi - u_0^-)\, dx + \int\limits_{\Omega^+} |\omega(x_3)|\, \partial_{x_3}(\varphi - u_0^+)\, \partial_{x_3}(\varphi - u_0^+)\, dx \ge 0$$

до нерівності (24), та отримаємо (25).

Взявши $\varphi = u_0 + s(\psi - u_0)$ в нерівності (25), де ψ довільна функція з K_0 та $s \in [0,1]$, маємо $\langle \partial_t u_0, \psi - u_0\rangle_0 + (u_0 + s(\psi - u_0), \psi - u_0)_{\mathcal{H}} \ge (f, \psi - u_0)_{\mathcal{V}}$. Перейшовши до границі при $s \to 0$, одержимо (24).

Розглянемо наступний функціонал

$$\int\limits_0^T \langle F_0, v\rangle_0\, dt := \int\limits_0^T \left(\int\limits_{\Omega_0} f\, v\, dx + \int\limits_{\Omega^+} |\omega(x_3)| f\, v\, dx \right) dt, \quad v \in L^2(0,T;\mathcal{H}).$$

Очевидно, що F_0 належить простору $L^2(0,T;\mathcal{H}^*)$. Завдяки (4) існує узагальнена похідна F_0' така, що

$$F_0' \in L^2(0,T;\mathcal{H}^*) \quad \text{та} \tag{27}$$

$$\int\limits_0^T \langle F_0', v\rangle_0\, dt = \int\limits_0^T \left(\int\limits_{\Omega_0} f'\, v\, dx + \int\limits_{\Omega^+} |\omega(x_3)| f'\, v\, dx \right) dt, \quad v \in L^2(0,T;\mathcal{H}).$$

Отже, всі умови (одна з них — це (27)) теореми 2.1 ([15, Глава 6]) виконуються для усередненої задачі (8) в сенсі означення 3.4, і, як наслідок з цієї теореми, задача (8) має єдиний узагальнений розвязок u_0 такий, що $u_0, u_0' \in L^2(0,T;\mathcal{H}) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1))$.

4 Апріорні рівномірні оцінки

Для усереднення крайових задач в густих мультиструктурах з неоднорідними умовами Неймана чи умовами Фур'є на межі приєднуваних тонких областей використовується метод спеціальних інтегральних тотожностей ([22, 24]). Для нашої задачі ця тотожність має вигляд (див. [24, глава 2])

$$\varepsilon \int\limits_{S_\varepsilon} \frac{\varphi(x)\, d\sigma_x}{\sqrt{1+\varepsilon^2|g'(x_3)|^2}} = \int\limits_{G_\varepsilon} \zeta(x_3)\, \varphi\, dx + \varepsilon \int\limits_{G_\varepsilon} \nabla_{\xi'} Y(\xi', x_3)|_{\xi'=\frac{x'}{\varepsilon}} \cdot \nabla_{x'}\varphi\, dx \tag{28}$$

для всіх $\varphi \in H^1(G_\varepsilon)$, де функція Y — єдиний розв'язок наступної задачі

$$\Delta_{\xi'} Y = \zeta(x_3) \quad \text{в} \quad \omega(x_3), \quad \partial_{\nu'(\xi')} Y = 1 \quad \text{на} \quad \partial\omega(x_3), \quad \int\limits_{\omega(x_3)} Y(\xi', x_3)\, d\xi' = 0,$$

де $\xi' = x'/\varepsilon$, $\nu'(\xi') = (\nu_1(\xi'), \nu_2(\xi'))$. Далі періодично продовжимо розв'язок Y по ξ_1 та ξ_2.

В [24] були доведені такі нерівності

$$\sup_{x\in G_\varepsilon} |\nabla_{\xi'} Y(\xi', x_3)\,|_{\xi'=\frac{x'}{\varepsilon}}\,| \le C_0, \tag{29}$$

$$\varepsilon \int\limits_{S_\varepsilon} \varphi^2\, d\sigma_x \le C_1 \left(\varepsilon^2 \int\limits_{G_\varepsilon} |\nabla_{x'}\varphi|^2\, dx + \int\limits_{G_\varepsilon} \varphi^2\, dx \right), \tag{30}$$

$$\int\limits_{G_\varepsilon} \varphi^2\, dx \le C_2 \left(\varepsilon^2 \int\limits_{G_\varepsilon} |\nabla_{x'}\varphi|^2\, dx + \varepsilon \int\limits_{S_\varepsilon} \varphi^2\, d\sigma_x \right). \tag{31}$$

$$\|\varphi\|_{L^2(S_\varepsilon)} \le C_3 \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{H^1(G_\varepsilon)} \quad \text{для всіх } \varphi \in H^1(G_\varepsilon). \tag{32}$$

Зауваження 4.1. *Тут і надалі всі сталі $\{C_i\}$ та $\{c_i\}$ в нерівностях не залежать від параметра ε.*

Лема 4.1 ([23]). *Норма $\|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \left(\int_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla u|^2 + u^2)\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$ в $H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$ та норма $\|\cdot\|_\varepsilon$, що породжена скалярним добутком*

$$(u, v)_\varepsilon = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla v\, dx, \quad u, v \in H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon),$$

рівномірно еквівалентні, тобто існують сталі $C_1 > 0$ та $\varepsilon_0 > 0$ такі, що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ та для всіх $u \in H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$ виконується оцінка

$$\|u\|_\varepsilon \le \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le C_4 \|u\|_\varepsilon. \tag{33}$$

Використовуючи нерівність Коші-Буняковського та нерівність Коші $2ab \le \delta a^2 + \delta^{-1} b^2$ з $\delta > 0$ та довільними додатніми числами a та b, за допомогою (33) отримаємо з (9), що

$$\langle u_\varepsilon', u_\varepsilon \rangle_\varepsilon + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2\, dx \le c_0\, \delta_1 \|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + c_1(1 + \delta_1^{-1}) \|f\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$$

для майже всіх $t \in (0, T)$. Вибираючи δ_1 так, щоб $c_0\, \delta_1 < \frac{1}{2}$, маємо

$$\langle u_\varepsilon', u_\varepsilon \rangle_\varepsilon + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2\, dx \le c_2\, \|f\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \tag{34}$$

для майже всіх $t \in (0, T)$. Інтегруючи (34) по $(0, t)$ та використовуючи співвідношення $\langle u_\varepsilon', u_\varepsilon \rangle_\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\right)$, виводимо

$$\max_{t\in(0,T)} \|u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon))} \le c_3 \|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))}. \tag{35}$$

Оцінимо $\|u_\varepsilon'\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))}$. Для цього ми застосуємо метод штрафу. Розглянемо таку наближену задачу

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t u_\varepsilon^\delta(x,t) & = & \Delta_x u_\varepsilon^\delta(x,t) + f(x,t), & (x,t) \in \Omega_\varepsilon \times (0,T), \\ \partial_\nu u_\varepsilon^\delta & = & -\frac{1}{\delta}(u_\varepsilon^\delta)^+, & (x,t) \in S_\varepsilon \times (0,T), \\ u_\varepsilon^\delta(x,t) & = & 0, & (x,t) \in \Gamma_\varepsilon \times (0,T), \\ \partial_\nu u_\varepsilon^\delta(x,t) & = & 0, & (x,t) \in \left(\partial\Omega_\varepsilon \cap \partial\Omega_0\right) \times (0,T), \\ u_\varepsilon^\delta(x,0) & = & 0, & x \in \Omega_\varepsilon, \end{array} \right. \tag{36}$$

де δ - довільне додатне число,

$$(u_\varepsilon^\delta)^+ = \left\{ \begin{array}{ll} u_\varepsilon^\delta, & \text{якщо } u_\varepsilon^\delta \ge 0; \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{array} \right.$$

Нагадаємо, що функція $u_\varepsilon^\delta \in L^2(0,T; H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon))$ така, що $\partial_t u_\varepsilon^\delta \in L^2(0,T; (H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon))^*)$ — узагальнений розв'язок (36), якщо $u_\varepsilon^\delta(\cdot, 0) = 0$ та виконується наступна інтегральна тотожність

$$\langle \partial_t u_\varepsilon^\delta, \varphi \rangle_\varepsilon + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon^\delta \cdot \nabla\varphi\, dx + \frac{1}{\delta} \int\limits_{S_\varepsilon} (u_\varepsilon^\delta)^+ \varphi\, d\sigma = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f\, \varphi\, dx \tag{37}$$

для довільної функції $\varphi \in L^2(0,T; H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon))$ та для майже всіх $t \in (0, T)$.

Знову, внаслідок (4), маємо, що $\partial_t u_\varepsilon^\delta \in L^2(0,T; H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon))$. Тому ми можемо взяти $\varphi = \partial_t u_\varepsilon^\delta$ в (37) та отримаємо для всіх $t \in (0, T)$, що

$$\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\partial_t u_\varepsilon^\delta(x,\tau)|^2 dx\, d\tau + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon^\delta(x,t)|^2 dx + \frac{1}{\delta} \int\limits_0^t \int\limits_{S_\varepsilon} (u_\varepsilon^\delta)^+ \partial_t u_\varepsilon^\delta d\sigma\, d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f\, \partial_t u_\varepsilon^\delta\, dx d\tau. \tag{38}$$

Оскільки

$$\int\limits_0^t \int\limits_{S_\varepsilon} (u_\varepsilon^\delta)^+ \partial_t u_\varepsilon^\delta\, d\sigma dt = \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_{S_\varepsilon} \partial_t \left(\left[(u_\varepsilon^\delta)^+\right]^2 \right) d\sigma dt \ge 0,$$

го внаслідок (38) має місце наступна оцінка

$$\|\partial_t u_\varepsilon^\delta\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))} \le \|f\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))} \le C_1. \tag{39}$$

Взявши $\varphi = u_\varepsilon^\delta$ в (37), маємо

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \partial_t u_\varepsilon^\delta\, u_\varepsilon^\delta\, dx + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon^\delta|^2\, dx + \frac{1}{\delta}\int\limits_{S_\varepsilon} (u_\varepsilon^\delta)^+ u_\varepsilon^\delta\, d\sigma = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f\, u_\varepsilon^\delta\, dx \tag{40}$$

для майже всіх $t \in (0,T)$. Враховуючи те, що

$$\int\limits_{S_\varepsilon} (u_\varepsilon^\delta)^+ u_\varepsilon^\delta\, d\sigma \ge 0. \tag{41}$$

аналогічно як при доведенні оцінки (35), виводимо з (40)

$$\max_{t\in(0,T)} \|u_\varepsilon^\delta(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_\varepsilon^\delta\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon))} \le C_2. \tag{42}$$

Використовуючи оцінки (39) та (42), отримуємо $\|u_\varepsilon^\delta\|_{H^1(\Omega_\varepsilon\times(0,T))} \le C_3$. Тому існує функція $w_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon \times (0,T))$ така, що

$$u_\varepsilon^\delta \xrightarrow{w} w_\varepsilon \quad \text{слабко в} \quad H^1(\Omega_\varepsilon \times (0,T)), \tag{43}$$

$$u_\varepsilon^\delta \xrightarrow{s} w_\varepsilon \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega_\varepsilon \times (0,T)) \tag{44}$$

при $\varepsilon \to 0$. Доведемо, що w_ε — розв'язок задачі (3).

Перейдемо до границі при $\delta \to 0$ в тотожності (37), та проінтегруємо її по $(0,T)$ з довільною тестовою функцією $\varphi = v \in \mathcal{K}_\varepsilon$. Використовуючи те, що

$$\frac{1}{\delta}\int_0^T \int_{S_\varepsilon} (u_\varepsilon^\delta)^+ v\, d\sigma\, dt \le 0$$

та збіжності (43) і (44), виводимо

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \partial_t w_\varepsilon\, v\, dx\, dt + \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla v\, dx\, dt \ge \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f\, v\, dx\, dt \quad \forall\, v \in \mathcal{K}_\varepsilon. \tag{45}$$

Взявши $\varphi = u_\varepsilon^\delta$ в (37) та враховуючи (41), виводимо

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla w_\varepsilon|^2\, dxdt \le \liminf_{\delta\to0} \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon^\delta|^2\, dx\, dt \le \liminf_{\delta\to0} \left\{ \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f\, u_\varepsilon^\delta\, dxdt \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \partial_t u_\varepsilon^\delta\, u_\varepsilon^\delta\, dx\, dt \right\} = \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f w_\varepsilon\, dx\, dt - \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \partial_t w_\varepsilon\, w_\varepsilon\, dxdt.$$

Отже, w_ε задовольняє нерівність

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \partial_t w_\varepsilon\, w_\varepsilon dx\, dt + \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla w_\varepsilon|^2\, dxdt \le \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f\, w_\varepsilon\, dxdt. \tag{46}$$

Віднімаючи нерівність (46) від (45), маємо

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \partial_t w_\varepsilon (v - w_\varepsilon)\, dx\, dt + \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla(v - w_\varepsilon)\, dx\, dt \ge \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f\,(v - w_\varepsilon)\, dx\, dt \quad \forall\, v \in \mathcal{K}_\varepsilon. \tag{47}$$

Отже, w_ε — узагальнений розв'язок задачі (3). Оскільки задача (3) має єдиний розв'язок, то $w_\varepsilon = u_\varepsilon$ та $u_\varepsilon \in L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon))$, $u_\varepsilon' \in L^2(\Omega_\varepsilon \times (0,T))$.

З (35) та (39) випливає нерівність

$$\max_{t\in(0,T)} \|u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon))} + \|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))} \le C_4. \tag{48}$$

5 Доведення теореми 1

1. Використовуючи (48), маємо

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega_0))} \le C_0, \quad \|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_0\times(0,T))} \le C_0, \quad \|\widetilde{u_\varepsilon}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega^+))} \le C_0,$$

$$\|\widetilde{\partial_{x_i} u_\varepsilon}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega^+))} \le C_0, \ i = 1,2,3, \quad \|\widetilde{\partial_t u_\varepsilon}\|_{L^2(\Omega^+\times(0,T))} \le C_0.$$

Тому можна вибрати підпослідовність $\{\varepsilon'\} \subset \{\varepsilon\}$ (яку знову позначимо ε) таку, що

$$\left.\begin{array}{llll} u_\varepsilon|_{\Omega_0} & \xrightarrow{w} u_0^- & \text{в} & H^1(\Omega_0\times(0,T)), \\ \widetilde{u_\varepsilon} & \xrightarrow{w} |\omega(x_3)|\,(|\omega(x_3)|^{-1}u) =: |\omega|\, u_0^+ & \text{в} & L^2(\Omega^+\times(0,T)), \\ \widetilde{\partial_{x_i} u_\varepsilon} & \xrightarrow{w} \gamma_i & \text{в} & L^2(\Omega^+\times(0,T)), \quad i = 1,2,3, \\ \widetilde{\partial_t u_\varepsilon} & \xrightarrow{w} \gamma_4 & \text{в} & L^2(\Omega^+\times(0,T)), \end{array}\right\} \text{ при } \varepsilon \to 0, \tag{49}$$

де u_0^-, u_0^+, γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 — деякі функції, які будуть визначені згодом.

Спочатку визначимо γ_3. Для довільної функції $\psi \in C_0^\infty(\Omega^+)$ маємо

$$\int\limits_{\Omega^+} \widetilde{\partial_{x_3} u_\varepsilon}\, \psi\, dx = \int\limits_{G_\varepsilon} \partial_{x_3} u_\varepsilon\, \psi\, dx = -\int\limits_{G_\varepsilon} u_\varepsilon\, \partial_{x_3}\psi\, dx - \varepsilon \int\limits_{S_\varepsilon} \frac{\varrho'(x_3)\, u_\varepsilon\, \psi}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 |\varrho'(x_3)|^2}}\, d\sigma_x = -\int\limits_{\Omega^+} \widetilde{u_\varepsilon}\, \partial_{x_3}\psi\, dx$$

$$- \int\limits_{\Omega^+} \varrho'(x_3)\, \zeta(x_3)\, \widetilde{u_\varepsilon}\, \psi\, dx + \varepsilon \int\limits_{G_\varepsilon} \varrho'(x_3)\, \nabla_{\xi'} Y(\xi', x_3)\,\big|_{\xi' = \frac{x'}{\varepsilon}} \cdot \nabla_{x'}(u_\varepsilon\, \psi)\, dx \tag{50}$$

для майже всіх $t \in (0,T)$. Використовуючи (29) та (48), перейдемо до границі в даній тотожності при $\varepsilon \to 0$, та отримаємо

$$\int\limits_{\Omega^+} \gamma_3\, \psi\, dx = -\int\limits_{\Omega^+} (|\omega(x_3)|\, u_0^+\, \partial_{x_3}\psi\, dx + |\omega(x_3)|'\, u_0^+\, \psi)\, dx \quad \text{для майже всіх} \quad t \in (0,T),$$

звідки маємо, що існує узагальнена похідна $\partial_{x_3} u_0^+$ та $\gamma_3 = |\omega(x_3)|\, \partial_{x_3} u_0^+$ м. с. в $\Omega^+ \times (0,T)$.

Аналогічно визначимо γ_4. Легко переконатися, що

$$\int_0^T \int_{\Omega^+} \widetilde{\partial_t u_\varepsilon}\, \psi\, dx\, dt = -\int_0^T \int_{\Omega^+} \widetilde{u}_\varepsilon\, \partial_t \psi\, dx\, dt \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega^+ \times (0,T)).$$

Перейдемо до границі в даній тотожності, використовуючи другу та останню границю в (49), одержимо

$$\int_0^T \int_{\Omega^+} \gamma_4\, \psi\, dx\, dt = -\int_0^T \int_{\Omega^+} |\omega(x_3)| u_0^- \partial_t \psi\, dx\, dt \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega^+ \times (0,T)), \tag{51}$$

звідки маємо, що $\gamma_1 = |\omega(x_3)| \partial_t u_0^-$ м. с. в $\Omega^+ \times (0,T)$.

Тепер визначимо $\gamma_i, i = 1, 2$. Розглянемо функції $Y_i(\xi_i) = -\xi_i + [\xi_i]$, $i = 1, 2$, де $[t]$ — ціла частина t. За допомогою цих функцій виберемо наступні тестові функції

$$\Phi_i(x,t) = \begin{cases} 0, & (x,t) \in \Omega_0 \times (0,T), \\ \varepsilon Y_i\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right) \psi(x,t), & (x,t) \in G_\varepsilon \times (0,T), \quad i = 1, 2, \end{cases} \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega^+ \times (0,T), \ \psi \geq 0.$$

Оскільки $Y_i \leq 0$ та $\psi \geq 0$, то $\Phi_i \in K_\varepsilon$, $i = 1, 2$. Легко переконатися, що

$$\nabla \Phi_1 = \left(-\psi + \varepsilon Y_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_{x_1}\psi,\ \varepsilon Y_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_{x_2}\psi,\ \varepsilon Y_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_{x_3}\psi\right), \qquad x \in G_\varepsilon,$$

$$\nabla \Phi_2 = \left(\varepsilon Y_2\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) \partial_{x_1}\psi,\ -\psi + \varepsilon Y_2\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) \partial_{x_2}\psi,\ \varepsilon Y_2\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) \partial_{x_3}\psi\right), \qquad x \in G_\varepsilon.$$

Підставляючи Φ_i, $i = 1,2$ в нерівність (11) для розв'язку u_ε та враховуючи те, що $\partial_t u_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon \times (0,T))$, маємо

$$\varepsilon \int_{G_\varepsilon} Y_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_t u_\varepsilon\, \psi\, dx + \int_{G_\varepsilon} \left(-\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\psi + \varepsilon Y_i\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \varepsilon Y_i\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_2}\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right.$$

$$\left. + \varepsilon Y_i\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3}\frac{\partial \psi}{\partial x_3}\right) dx \geq \int_{G_\varepsilon} \varepsilon f\, Y_i\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right) \psi\, dx, \quad i = 1, 2.$$

За допомогою (48), з попередньої нерівності виводимо нерівність

$$\left| \int_{\Omega^+ \times (0,T)} \widetilde{\partial_{x_i} u_\varepsilon} \psi\, dx\, dt \right| \leq \varepsilon \left(\int_{G_\varepsilon \times (0,T)} \left| Y_i\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right) (\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \psi - f\,\psi + \partial_t u_\varepsilon\, \psi) \right| dx\, dt \right)$$

$$\leq \varepsilon c_1 \int_0^T \left(\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon)} \|\nabla \psi\|_{L^2(G_\varepsilon)} + \|f\|_{L^2(G_\varepsilon)} \|\psi\|_{L^2(G_\varepsilon)} + \|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon)} \|\psi\|_{L^2(G_\varepsilon)} \right) dt$$

$$\leq \varepsilon c_2 \|\psi\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega^+))}, \quad i = 1, 2,$$

звідки в границі (при $\varepsilon \to 0$) одержимо

$$\int_{\Omega^+ \times (0,T)} \gamma_i \psi\, dx dt = 0 \qquad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega^+ \times (0,T)), \quad \psi \geq 0. \tag{52}$$

З (52) отримаємо, що $\gamma_i = 0$, $i = 1, 2$, м. с. в $\Omega^+ \times (0,T)$.

2. Покажемо, що сліди $u_0^+|_{\Xi_0}$ та $u_0^-|_{\Xi_0}$ рівні. За допомогою неперервності оператору сліду, компактного вкладення $H^{1/2}(\Xi_0) \subset L^2(\Xi_0)$ та першого співвідношення в (49), маємо

$$u_\varepsilon(x',0,t) \xrightarrow{s} u_0^-(x',0,t) \quad \text{в} \quad L^2(\Xi_0) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0 \quad \text{для м. в.} \quad t \in (0,T). \tag{53}$$

Розглянемо рівність

$$\widetilde{u_\varepsilon}(x',0,t) = \chi_{\omega_0}\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon(x',0,t) \quad \text{для м. в. } (x',0,t) \in \Xi_0 \times (0,T), \tag{54}$$

де $\chi_{\omega_0}(\xi')$, $\xi' \in \mathbb{R}^2$, — 1-періодична функція визначена на квадраті Ξ_0 наступним чином

$$\chi_{\omega_0}(\xi') = \begin{cases} 1, & \xi' \in \overline{\omega(0)}, \\ 0, & [0,1] \times [0,1] \setminus \overline{\omega(0)}. \end{cases}$$

Відомо, що $\chi_{\omega_0}\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{w} |\omega(0)|$ слабко в $L^2(\Xi_0)$ при $\varepsilon \to 0$. Звідси та з (53) отримаємо, що права частина (54) збігається до $|\omega(0)|\, u_0^-$ слабко в $L^2(\Xi_0)$ при $\varepsilon \to 0$.

З іншого боку, за допомогою (28) маємо

$$\int_{\Xi_0} \widetilde{u_\varepsilon}(x',0,t)\, \psi(x')\, dx' = \frac{1}{h}\left(\int_{\Omega^+} \widetilde{u_\varepsilon(x,t)}\, \psi(x')\, dx + \int_{\Omega^+} (x_3 - h)\, \widetilde{\partial_{x_3} u_\varepsilon}(x,t)\, \psi(x')\, dx \right.$$

$$+ \int_{\Omega^+} \zeta(x_3)\, \varrho'(x_3)\, (x_3 - h)\, \widetilde{u_\varepsilon}\, \psi(x')\, dx \tag{55}$$

$$\left. + \varepsilon \int_{G_\varepsilon} \varrho'(x_3)\, (x_3 - h)\, \nabla_{\xi'} Y(\xi', x_3)\, |_{\xi' = \frac{x'}{\varepsilon}} \cdot \nabla_{x'}(u_\varepsilon \psi)\, dx \right)$$

для майже всіх $t \in (0,T)$ та для довільної функції $\psi \in C_0^\infty(\Xi_0)$. Використовуючи результати збіжності отримані вище та переходячи до границі в (55) при $\varepsilon \to 0$, отримаємо наступну тотожність

$$\int_{\Xi_0} |\omega(0)|\, u_0^-(x',0,t) \psi(x')\, dx = \frac{1}{h}\left(\int_{\Omega^+} |\omega(x_3)|\, u_0^+(x,t)\, \psi(x')\, dx + \int_{\Omega^+} (x_3 - h) |\omega(x_3)|\, \partial_{x_3} u_0^+(x,t)\, \psi\, dx \right.$$

$$\left. + \int_{\Omega^+} (x_3 - h)\, \zeta(x_3)\, \varrho'(x_3)\, |\omega(x_3)|\, u_0^+(x,t)\, \psi(x')\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{h} \int_{\Omega^+} \left(|\omega(x_3)|\, u_0^+\, \psi(x') + (x_3 - h)\, \psi(x')\, \partial_{x_3}\left(|\omega(x_3)|\, u_0^+(x,t) \right) \right) dx$$

$$= \int_{\Xi_0} |\omega(0)|\, u_0^+(x',0,t)\, \psi(x')\, dx$$

для всіх $\psi \in C_0^\infty(\Xi_0)$ та для майже всіх $t \in (0,T)$, звідки $u_0^+(x',0,t) = u_0^-(x',0,t)$ для майже всіх $x' \in \Xi_0$ та $t \in (0,T)$.

3. В першому пункті ми фактично довели, що для майже всіх $x \in \Omega^+$

$$\widetilde{u_\varepsilon}(x,\cdot) \ \stackrel{w}{\longrightarrow}\ |\omega|\, u_0^+(x,\cdot) \quad \text{слабко в } H^1(0,T) \quad \text{при} \ \ \varepsilon \to 0. \tag{56}$$

Оскільки $\widetilde{u_\varepsilon}|_{t=0}=0$, границя (56) означає, що $u_0^+|_{t=0}=0$. Очевидно, що і $u_0^-|_{t=0}=0$.

З (28) маємо, що для майже всіх $t \in (0,T)$ виконується наступна нерівність

$$0 \le \int\limits_{\Omega^+} \zeta(x_3)\widetilde{u_\varepsilon}(x,t)\,\varphi(x)\,dx + \varepsilon \int\limits_{G_\varepsilon} \nabla_{\xi'} Y(\xi',x_3)|_{\xi'=\frac{x'}{\varepsilon}} \cdot \nabla_{x'}(u_\varepsilon(x,t)\varphi(x))\,dx \tag{57}$$

для всіх $\varphi \in C_0^\infty(\Omega^+)$ таких, що $\varphi \le 0$ в Ω^+. Переходячи до границі в (57) при $\varepsilon \to 0$, отримаємо

$$0 \le \int\limits_{\Omega^+} \zeta(x_3) u_0^+(x,t)\,\varphi(x)\,dx \qquad \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\Omega^+), \quad \varphi \le 0,$$

яка означає, що $u_0^+ \le 0$ м. с. в $\Omega^+ \times (0,T)$.

Отже, функція u_0 визначена в (7) належить до множини $\mathcal{K}_0^0$.

4. З (48) та першої границі (49) виводимо, що $u_\varepsilon(\cdot,T)|_{\Omega_0} \stackrel{s}{\longrightarrow} u_0^-(\cdot,T)$ сильно в $L^2(\Omega_0)$ при $\varepsilon \to 0$. Також з (48) випливає, що ми можемо вибрати підпослідовність $\{\varepsilon\}' \subset \{\varepsilon\}$ (яку знову позначимо через ε) таку, що

$$\widetilde{u_\varepsilon}(\cdot,T) \ \stackrel{w}{\longrightarrow}\ w_0^+(\cdot,T) \quad \text{слабко в } L^2(\Omega^+) \quad \text{при} \ \ \varepsilon \to 0.$$

Покажемо, що $w_0^+(x,T) = |\omega(x_3)|\,u_0^+(x,T),\ x \in \Omega^+$. Перейшовши до границі при $\varepsilon \to 0$ в наступній тотожності

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega^+} \widetilde{\partial_t u_\varepsilon}(x,t)\,v(x)\,dx\,dt = \int\limits_{\Omega^+} \widetilde{u_\varepsilon}(x,T)\,v(x)\,dx \quad \forall v \in L^2(\Omega^+),$$

маємо

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega^+} |\omega(x_3)|\,\partial_t u_0^+(x,t)\,v(x)\,dx\,dt = \int\limits_{\Omega^+} w_0^+(x,T)\,v(x)\,dx \quad \forall v \in L^2(\Omega^+),$$

або

$$\int\limits_{\Omega^+} |\omega(x_3)|\,u_0^+(x,T)\,v(x)\,dx = \int\limits_{\Omega^+} w_0^+(x,T)\,v(x)\,dx \quad \forall v \in L^2(\Omega^+).$$

Використовуючи слабку напівнеперервність норми в гільбертовому просторі, маємо

$$\liminf_{\varepsilon\to0}\left(\|u_\varepsilon(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega_0)} + \|\widetilde{u}_\varepsilon(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega^+)}\right) \ge \|u_0^-(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega_0)} + \||\omega|u_0^+(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega^+)} = \|u_0(\cdot,T)\|^2_{\mathcal{V}}.$$

З цієї нерівності отримаємо

$$\liminf_{\varepsilon\to0} \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \partial_t u_\varepsilon\, u_\varepsilon dx\,dt \ge \int\limits_0^T (\partial_t u_0, u_0)_{\mathcal{V}}\,dt. \tag{58}$$

5. Додамо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_0} |\nabla(\varphi-u_\varepsilon)|^2\,dx + \int\limits_{G_\varepsilon} |\partial_{x_3}(\varphi-u_\varepsilon)|^2\,dx + \int\limits_{G_\varepsilon} |\partial_{x_2}u_\varepsilon|^2\,dx + \int\limits_{G_\varepsilon} |\partial_{x_1}u_\varepsilon|^2\,dx \ge 0$$

до (12) та проінтегруємо її по $(0,T)$. Тут φ — довільна функція з наступної множини

$$\mathcal{K}_0^1 = \left\{\varphi \in C^1\big(\overline{\Omega_1}\times[0,T]\big): \quad \varphi \le 0 \ \text{ на } \ \Omega^+, \quad \varphi = 0 \ \text{ на } \ \Xi_h \ \text{ для всіх } \ t \in [0,T]\right\}.$$

Використовуючи те, що $\partial_t u_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon \times (0,T))$ маємо

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \partial_t u_\varepsilon\,(\varphi-u_\varepsilon)dx\,dt + \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_0} \nabla\varphi\cdot\nabla(\varphi-u_\varepsilon)\,dx\,dt + \int\limits_0^T \int\limits_{G_\varepsilon} \partial_{x_1}u_\varepsilon\,\partial_{x_1}\varphi\,dx\,dt$$
$$+ \int\limits_0^T \int\limits_{G_\varepsilon} \partial_{x_2}u_\varepsilon\,\partial_{x_2}\varphi\,dx\,dt + \int\limits_0^T \int\limits_{G_\varepsilon} \partial_{x_3}\varphi\,\partial_{x_3}(\varphi-u_\varepsilon)\,dx\,dt \ge \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(\varphi-u_\varepsilon)\,dx\,dt, \tag{59}$$

яка може бути переписана у наступній формі

$$\int\limits_0^T\!\!\int\limits_{\Omega_0} \partial_t u_\varepsilon \varphi\,dx\,dt + \int\limits_0^T\!\!\int\limits_{\Omega^+} \widetilde{\partial_t u_\varepsilon}\varphi\,dx\,dt - \int\limits_0^T\!\!\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \partial_t u_\varepsilon\,u_\varepsilon dx\,dt + \int\limits_0^T\!\!\int\limits_{\Omega_0} \nabla\varphi\cdot\nabla(\varphi-u_\varepsilon)\,dx\,dt$$
$$+ \int\limits_0^T\!\!\int\limits_{\Omega^+} \widetilde{\partial_{x_1}u_\varepsilon}\,\partial_{x_1}\varphi\,dx\,dt + \int\limits_0^T\!\!\int\limits_{\Omega^+} \widetilde{\partial_{x_2}u_\varepsilon}\,\partial_{x_2}\varphi\,dx\,dt$$
$$+ \int\limits_0^T\!\!\int\limits_{\Omega^+} \chi_h\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\partial^2_{x_3}\varphi\,dx\,dt - \int\limits_0^T\!\!\int\limits_{\Omega^+} \partial_{x_3}\varphi\,\widetilde{\partial_{x_3}u_\varepsilon}\,dx\,dt$$
$$\ge \int\limits_0^T\!\!\int\limits_{\Omega_0} f\,(\varphi-u_\varepsilon)\,dx\,dt + \int\limits_0^T\!\!\int\limits_{\Omega^+} \chi_h\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) f\,\varphi\,dx\,dt - \int\limits_0^T\!\!\int\limits_{\Omega^+} f\widetilde{u_\varepsilon}\,dx\,dt. \tag{60}$$

Переходячи до границі (60) при $\varepsilon \to 0$ та використовуючи (58) та (49), отримаємо таку інтегральну нерівність

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_0} \partial_t u_0^- \varphi\,dx\,dt + \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega^+} |\omega(x_3)|\partial_t u_0^+ \varphi\,dx\,dt$$
$$- \int\limits_0^T (\partial_t u_0\, u_0)_{\mathcal{V}} dx\,dt + \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_0} \nabla\varphi\cdot\nabla(\varphi-u_0^-)\,dx\,dt$$
$$+ \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega^+} |\omega(x_3)|\partial^2_{x_3}\varphi\,dx\,dt - \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega^+} |\omega(x_3)|\partial_{x_3}\varphi\,\partial_{x_3}u_0^+\,dx\,dt$$
$$\ge \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_0} f\,(\varphi-u_0^-)\,dx\,dt + \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega^+} |\omega(x_3)| f\,\varphi\,dx\,dt - \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega^+} |\omega(x_3)| f u_0^+\,dx\,dt. \tag{61}$$

Нерівність (61) може бути переписана у вигляді

$$\int_0^T (\partial_t u_0, \varphi - u_0)_{\mathcal{V}}\, dt + \int_0^T (\varphi, \varphi - u_0)_{\mathcal{H}}\, dt \geq \int_0^T (f, \varphi - u_0)_{\mathcal{V}}\, dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{K}_0^1. \qquad (62)$$

Оскільки множина $\mathcal{K}_0^1$ щільна в $\mathcal{K}_0$, інтегральна нерівність (62) виконується для всіх $\varphi \in \mathcal{K}_0$. Разом з включенням $u_0 \in \mathcal{K}_0^0$, яке доведене в 3 пункті, це означає, що функція u_0 є узагальненим розв'язком усередненої задачі (8) (див. означення 3.5).

Враховуючи єдиність розв'язку задачі (8) зрозуміло, що всі описані вище міркування мають місце для будь-якої підпослідовності $\{\varepsilon\}$, яку ми обрали на початку доведення. Отже, теорему 1 доведено.

Література

1. Воробьев А. Ю., Шапошникова Т. А. *Об усреднении неоднородной задачи Синьорини для уравнения Пуассона в периодически перфорированной области* // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т.39, №3.
2. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. — М., 1983.
3. Котляров В. П., Хруслов Е. Я. *О предельном граничном условии одной задачи Неймана* // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. — 1970. — №10. — С. 83–96.
4. Сузиков Г. В., Хруслов Е. Я. *О прохождении звуковых волн через тонкие каналы в отражающем слое* // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. — 1976. — №5. — С. 35–49.
5. Хруслов Е. Я. *О резонансных явлениях в одной задаче дифракции* // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. — 1968. — №10. — С. 113–120.
6. Baiocchi C., Capelo A. Variational and Quasivariational inequalities, Applications to Free Boundary Problems Willey. Chichester, 1984.
7. Blanchard D., Gaudiello A., and Griso G. *Junction of a periodic family of elastic rods with 3d plate. Part I. II,* J. Math. Pures Appl., **88**, 9 (2007), 1–33; **88**, 9 (2007), 149–190.
8. Blanchard D., Gaudiello A., and Mel'nyk T. A. *Boundary homogenization and reduction of dimension in a Kirchhoff-Love plate,* SIAM J. Math. Anal., **39**, 6 (2008), 1764–1787.
9. Blanchard D., Gaudiello A., and Mossino J. *Highly oscillating boundaries and reduction of dimension in the critical case.* Anal. Appl., **5** (2007), 137–163.
10. Chechkin G. A., Mel'nyk T. A. *Asymptotics of eigenelements to spectral problem in thick cascade junction with concentrated masses,* Applicable Analysis, DOI:10.1080/00036811.2011.602634 (2012).
11. D'Apice C., De Maio U., and Mel'nyk T. A. *Asymptotic analysis of a perturbed parabolic problem in a thick junction of type 3:2:2,* Networks Heterogen. Media, **2** (2007), 255–277.
12. Donato P., Nabil A. *Homogenization and correctors for the heat equation in perforated domains.* Ricerche di Matematica, **L**, 1 (2001), 115–144.
13. Donato P., Nabil A. *Homogenization of semilinear parabolic equations in perforated domains.* Chin. Ann. Math. **25B**, 2 (2004), 143–156.
14. Durante T. and Mel'nyk T. A. it Homogenization of quasilinear optimal control problems involving a thick multilevel junction of type 3:2:1. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, DOI:10.1051/cocv/2011107 (2012)

15. Glowinski R., Lions J. L., Tremoliere R. Numerical analyses of variational inequalities [Russian translation], M. Mir, 1979.
16. Kazmerchuk Iu. A., Mel'nyk, T. A. *Homogenization of the Signorini boundary-value problem in a thick plane junction. Nonlinear oscillations,* **12**, 1 (2009), 44–58.
17. Lavrentovich Y. I., Knyzkova T. V., Pidlisnyuk V. V. *The potential of application of new nanostructural materials of for degradation of pesticides in water,* Proceedings of the 7-th International HCH and Pesticides Forum "Towards the estaplishment of an absolute POPS", June 5–7, 2003, Kyiv, Ukraine, 167–169.
18. Mel'nyk T. A. *Homogenization of the Poisson equation in a thick periodic junction.* Z. Anal. An., **18**, 4 (1999), 953–975.
19. Mel'nyk T. A. *Asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions of the Steklov problem in a thick periodic junction.* Nonlinear Oscillations, **4**, 1 (2000), 91–105.
20. Mel'nyk T. A. *Asymptotic analysis of a spectral problem in a periodic thick junction of type 3:2:1,* Mathematical Methods in the Applied Sciences, **23** (2000), 321–346.
21. Mel'nyk T. A. *Homogenization of a singularly perturbed parabolic problem in a thick periodic junction of type 3:2:1,* Ukr. Math. J. **52**, 11 (2000), 1737–1749.
22. Mel'nyk T. A. *Homogenization of a singularly perturbed parabolic problem in a thick periodic junction of the type 3:2:1,* Ukrainskii Matem. Zhurnal, **52** (2000), 1524–1534 (in Ukrainian); English transl. in Ukrainian Math. Journal, **52** (2000), 1737–1749.
23. Mel'nyk T. A. *Homogenization of the Poisson equation in a thick periodic junction,* Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, **18**, 4 (1999), 953–975.
24. Mel'nyk T. A. *Homogenization of a boundary value problem with a nonlinear boundary condition in a thick junction of type 3:2:1,* Math. Models Meth. Appl. Sci., **31**, 9 (2008), 1005–1027. Published online: `http://dx.doi.org/10.1002/mma.951`
25. Mel'nyk T. A. and Vashchuk P. S. *Homogenization of a boundary value problem with mixed type of boundary conditions in a thick junction* [in Russian], Differ. Uravn. **43**, 5 (2007), 677–684; English transl.: *Differ. Equ.* **43**, 5 (2007), 696–703.
26. Mel'nyk T. A., Nakvasiuk Iu. A., Wendland W. L. *Homogenization of the Signorini boundary-value problem in a thick plane junction and boundary integral equations for the homogenized problem.* Mathematical Methods in the Applied Science, **34**, 7(2011), 758–775.
27. Mel'nyk T. A. and Nazarov S. A. *The asymptotic structure of the spectrum in the problem of harmonic oscillations of a hub with heavy spokes* [in Russian], Dokl. Akad. Nauk, Ross. Akad. Nauk, **333**, 1 (1993), 13–15; English transl.: Russ. Acad. Sci., Dokl., Math., **48**, 3 (1994), 428–432.
28. Mel'nyk T. A. and Nazarov S. A. *The asymptotics of the solution to the Neumann spectral problem in a domain of the "dense-comb" type* [in Russian], Tr. Semin. Im. I. G. Petrovskogo, **19** (1996), 138–173; English transl.: J. Math. Sci., New York **85**, 6 (1997), 2326–2346.
29. Mel'nyk T. A. and Nazarov S. A. *Asymptotic analysis of the Neumann problem on the junction of a body and thin heavy rods* [in Russian], Algebra Anal. **12**, 2 (2000), 188–238: English transl.: St. Petersb. Math. J. **12**, 2 (2001), 317–351.
30. Nazarov S. A. *Junctions of singularly degenerating domains with different limit dimensions I, II* [in Russian], Tr. Semin. Im. I. G. Petrovskogo **18** (1995), 1-78; **20** (1997), 155–196; English transl.: J. Math. Sci., New York,**80**, 5 (1996), 1989–2034: **97**, 3 (1999), 4085–4108.
31. Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia E. Vibration and Coupling of Continuous Systems, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.

32. Sandrakov G. V. *Homogenization of variational inequalities for problems with regular obstacles*, Dokl. Akad. Nauk, 397 (2004), 170–173; English transl., Dokl. Math. 71 (2004), 119–122.

33. Shaposhnikova T. A., Zubova M. N. *Homogenization problem for a parabolic variational inequality with constraints on subsets situated on the boundary of the domain*, Networks and Heteregeneous Media, **3**, 3 (2008), 1–20.

34. Showalter R. E. *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations*, Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, **49** (1997).

35. Signorini A. Questioni di elasticita non linearizzata o semilinearizzata, Rend. di Matem. e delle sue appl., 18, 1959.

36. Uspenskii S. V. *The traces of functions the Sobolev space $W_p^{l_1,\dots,l_n}$ on smooth surfaces*, Siberian Math. J., **13** (1972), 298–313.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
Київ, Україна

Надійшло 12.04.2012

Mel'nyk T.A., Nakvasiuk Yu.A. *Homogenization of the parabolic Signorini boundary-value problem in a thick junction of type 3:2:1*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 90–110.

We consider a parabolic Signorini boundary-value problem in a thick junction Ω_ε which is the union of a domain Ω_0 and a large number of $\varepsilon-$periodically situated thin cylinders. The Signorini conditions are given on the lateral surfaces of the cylinders. The asymptotic analysis of this problem is done as $\varepsilon \to 0$, i.e., when the number of the thin cylinders infinitely increases and their thickness tends to zero. With the help of the integral identity method we prove a convergence theorem and show that the Signorini conditions are transformed (as $\varepsilon \to 0$) in differential inequalities in the region that is filled up by the thin cylinders.

Мельник Т.А., Наквасюк Ю.А. *Усреднение параболической краевой задачи Синьорини в густом соединении типа 3:2:1* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 90–110.

Рассматривается параболическая краевая задача Синьорини в густом соединении Ω_ε, которое является объединением некоторой области Ω_0 и большого количества $\varepsilon-$ периодически расположенных тонких криволинейных цилиндров. На боковых поверхностях цилиндров заданные условия Синьорини. Изучено асимптотическое поведение решения такой задачи, когда $\varepsilon \to 0$, т.е. когда количество цилиндров неограниченно возрастает, а их толщина стремится к нулю. С помощью метода интегральных тождеств доказана теорема сходимости и показано, что условия Синьорини трансформируются (при $\varepsilon \to 0$) в дифференциальные неравенства в области заполняемой тонкими цилиндрами.

Карпатські математичні публікації. Т.4, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №1

УДК 517.576

Мулява О.М.[1], Шеремета М.М.[2]

НАЛЕЖНІСТЬ ДО КЛАСІВ ЗБІЖНОСТІ АДАМАРОВИХ КОМПОЗИЦІЙ ПОХІДНИХ ГЕЛЬФОНДА-ЛЕОНТЬЄВА АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Мулява О.М., Шеремета М.М. *Належність до класів збіжності адамарових композицій похідних Гельфонда-Леонтьєва аналітичних функцій* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — С. 111–115.

Знайдено умови, за яких з належності до валіронового класу збіжності цілих функцій f і g випливає належність до цього класу похідної Гельфонда-Леонтьєва адамарової композиції функцій f і g та адамарової композиції похідних Гельфонда-Леонтьєва цих функцій. Подібна задача розв'язана для аналітичних в одиничному крузі функцій.

Для степеневого ряду

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \tag{1}$$

з радіусом збіжності $R[f] \in [0, \infty]$ і степеневого ряду $l(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} l_k z^k$ з $R[f] \in [0, \infty]$ і $l_k > 0$ для всіх $k \geq 0$ степеневий ряд

$$D_l^{(n)} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_k}{l_{k+n}} f_{k+n} z^k$$

називається [3] похідною Гельфонда-Леонтьєва n-го порядку. Якщо $l(z) = e^z$, то $D_l^{(n)} f(z) = f^{(n)}(z)$ є звичайною похідною n-го порядку. Зрозуміло, що не завжди радіус збіжності похідної Гельфонда-Леонтьєва ряду (1) збігається з радіусом збіжності цього ряду. Проте в [4, 5] доведено, що для того, щоб для будь-якого ряду (1) рівності $R[f] = +\infty$ і $R[D_l^{(n)} f] = +\infty$ були рівносильними необхідно і досить, щоб

$$0 < \varliminf_{k\to\infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} \leq \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} < +\infty, \tag{2}$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 30D15.

Ключові слова і фрази: ціла функція, аналітична в одиничному крузі функція, похідна Гельфонда-Леонтьєва, адамарова композиція.

а для еквівалентності рівностей $R[f]=1$ і $R[D_l^{(n)}f]=1$ необхідною і достатньою є умова

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{l_k/l_{k+1}}=1. \tag{3}$$

Степеневий ряд

$$(f*g)(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f_kg_kz^k$$

називається адамаровою композицією ряду (1) і ряду $g(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}g_kz^k$. Відомо [6], що $R[f*g]\geq R[f]R[g]$, і обернена нерівність може бути неправильною. Властивості адамарової композиції використовуються для дослідження аналітичного продовження функцій (див., напр., [1, 7]).

Не дивлячись на загальність умов (2) і (3) у наведеному вище твердженні, вони є достатніми для одночасної аналітичності похідної Гельфонда-Леонтьєва адамарової композиції $D_l^{(n)}(f*g)$ функцій f і g та адамарової композиції $D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g$ їх похідних Гельфонда-Леонтьєва [5], тобто за умови (2) рівносильними є рівності $R[D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g]=+\infty$ і $R[D_l^{(n)}(f*g)]=+\infty$, а за умови (3) такими є рівності $R[D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g]=1$ і $R[D_l^{(n)}(f*g)]=1$.

Якщо $R[f]>0$, то для $0\leq r<R[f]$ нехай $M(r,f)=\max\{|f(z)|:|z|=r\}$. Для цілої функції f величина $\varrho[f]=\varlimsup\limits_{r\to+\infty}\dfrac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r}$ називається її порядком, а належність f до валіронового класу збіжності визначається умовою [8]

$$\int_{r_0}^{\infty}\frac{\ln M(r,f)}{r^{\varrho+1}}dr<\infty, \tag{4}$$

де $\varrho=\varrho[f]$. Якщо функція f аналітична в одиничному крузі $\mathbb{D}=\{z:|z|<1\}$, то порядок переважно вводять формулою $\varrho^*[f]=\varlimsup\limits_{r\uparrow 1}\dfrac{\ln\ln M(r,f)}{-\ln(1-r)}$, а клас збіжності — умовою [2]

$$\int_{0}^{1}(1-r)^{\varrho-1}\ln^+M(r,f)dr<\infty, \tag{5}$$

де $\varrho=\varrho^*[f]$. Зростання функцій $D_l^{(n)}f$, $D_l^{(n)}(f*g)$ та $D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g$ у термінах порядку (і нижнього порядку) досліджено в [4]. З іншого боку, в статті [5] вказано умови на функцію l, за яких f і $D_l^{(n)}f$ належать до одного і того ж з означених вище класів збіжності. Тут дослідимо належність до відповідних класів збіжності функцій $D_l^{(n)}(f*g)$ та $D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g$.

Почнемо з цілих функцій. Для $\varrho\in(0,+\infty)$ через $V\{\varrho\}$ позначимо клас цілих функцій, для яких виконується умова (4).

Теорема 1. *Якщо $f\in V\{\varrho_1\}$ і $g\in V\{\varrho_2\}$, то за умови (2) $D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g\in V\left\{\dfrac{\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1+\varrho_2}\right\}$ і $D_l^{(n)}(f*g)\in V\left\{\dfrac{\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1+\varrho_2}\right\}$ для кожного $n\geq 0$.*

Доведення. Оскільки f і g — цілі функції, то з умови (2) випливає, що і функції $D_l^{(n)}(f*g)$ та $D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g$ є цілими. Більш того [4], за умови (2) правильні рівності $\varrho[D_l^{(n)}f]=\varrho[f]$ і $\varrho[D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g]=\varrho[D_l^{(n)}(f*g)]=\varrho[f*g]$.

Зауважимо, що, використовуючи формулу Адамара для знаходження порядку, маємо $\dfrac{1}{\varrho[f]}=\varliminf\limits_{k\to\infty}\dfrac{-\ln|f_k|}{k\ln k}$, звідки легко випливає, що $\dfrac{1}{\varrho[f*g]}\geq\dfrac{1}{\varrho[f]}+\dfrac{1}{\varrho[g]}$, тобто $\varrho[f*g]\leq\dfrac{\varrho[f]\varrho[g]}{\varrho[f]+\varrho[g]}$ (обернена нерівність може бути неправильною). Тому, якщо $f\in V\{\varrho_1\}$ і $g\in V\{\varrho_2\}$, то $\varrho[D_l^{(n)}(f*g)]\leq\dfrac{\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1+\varrho_2}$ і $\varrho[D_l^{(n)}f*D_l^{(n)}g]\leq\dfrac{\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1+\varrho_2}$.

Далі, в [5] доведено, що за умови (2) ціла функція f належить до валіронового класу збіжності тоді і тільки тоді, коли до цього класу належить її похідна Гельфонда-Леонтьєва $D_l^{(n)}f$. Звідси і з (4) випливає, що $\int_{r_0}^{\infty}\dfrac{\ln M(r,D_l^{(n)}f)}{r^{\varrho+1}}dr<\infty$ і, тим паче, $\int_{r_0}^{\infty}\dfrac{\ln M(r,f^{(n)})}{r^{\varrho+1}}dr<\infty$ для кожного $n>0$.

З наведених вище тверджень випливає, що за умов теореми 1 досить довести, що $f*g\in V\left\{\dfrac{\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1+\varrho_2}\right\}$.

Нехай $\mu(r,f)=\max\{|f_k|r^k:k\geq 0\}$ — максимальний член ряду (1). Добре відомо, і це легко показати, що в умові (4) замість $\ln M(r,f)$ можна поставити $\ln\mu(r,f)$. Оскільки

$$\begin{aligned}\mu(r,f*g)&=\max\{|f_kg_k|r^k:k\geq 0\}=\max\{|f_k|r^{\varrho_2/(\varrho_1+\varrho_2)}|g_k|r^{\varrho_1/(\varrho_1+\varrho_2)}:k\geq 0\}\\&\leq\mu(r^{\varrho_2/(\varrho_1+\varrho_2)},f)\mu(r^{\varrho_1/(\varrho_1+\varrho_2)},g),\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}\int_{r_0}^{\infty}\frac{\ln\mu(r,f*g)}{r^{\varrho_1\varrho_2/(\varrho_1+\varrho_2)+1}}dr&\leq\int_{r_0}^{\infty}\frac{\ln\mu(r^{\varrho_2/(\varrho_1+\varrho_2)},f)}{r^{\varrho_1\varrho_2/(\varrho_1+\varrho_2)+1}}dr+\int_{r_0}^{\infty}\frac{\ln\mu(r^{\varrho_1/(\varrho_1+\varrho_2)},g)}{r^{\varrho_1\varrho_2/(\varrho_1+\varrho_2)+1}}dr\\&=\frac{\varrho_1+\varrho_2}{\varrho_2}\int_{t_0}^{\infty}\frac{\ln\mu(t,f)}{t^{\varrho_1+1}}dr+\frac{\varrho_1+\varrho_2}{\varrho_1}\int_{t_0}^{\infty}\frac{\ln\mu(t,g)}{t^{\varrho_2+1}}dr,\end{aligned}$$

звідки легко випливає, що, якщо $f\in V\{\varrho_1\}$ і $g\in V\{\varrho_2\}$, то $f*g\in V\left\{\dfrac{\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1+\varrho_2}\right\}$. □

Для аналітичних функцій в одиничному крузі ситуація дещо складніша. По-перше, з того, що $R[f]=R[g]=1$ випливає тільки нерівність $R[f*g]\geq 1$. Рівність $R[f*g]=1$, матимемо, якщо додатково припустимо, що $\varlimsup\limits_{k\to\infty}|f_kg_k|>0$. По-друге, в [4] доведено, що за умови

$$0<\varliminf_{k\to\infty}\frac{l_k}{(k+1)l_{k+1}}\leq\varlimsup_{k\to\infty}\frac{l_k}{(k+1)l_{k+1}}<+\infty, \tag{6}$$

для аналітичної в $\mathbb{D}$ функції (1) $\varrho^*[D_l^{(n)}f]=\varrho^*[f]$, а належність до визначеного умовою (5) класу збіжності похідної Гельфонда-Леонтьєва $D_l^{(1)}f$ в [5] доведено за значно сильнішої умови $0<\varliminf\limits_{k\to\infty}\dfrac{l_k}{l_{k+1}}\leq\varlimsup\limits_{k\to\infty}\dfrac{l_k}{l_{k+1}}<+\infty$. Тому нам потрібна така лема.

Лема 1. *Якщо послідовність (l_k) задовольняє умову (6), то аналітична в $\mathbb{D}$ функція f належить до класу збіжності, визначеного умовою (5), тоді і тільки тоді, коли до цього класу збіжності належить її похідна Гельфонда-Леонтьєва $D_l^{(1)}f$.*

Доведення. З інтегральної формули Коші $f'(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{|\tau-z|=(1-|z|)/2}\dfrac{f(\tau)d\tau}{(\tau-z)^2}$ отримуємо нерівність $M(r,f') \le \dfrac{2}{1-r}M\left(\dfrac{1+r}{2}, f\right)$, а з огляду на формулу Лейбніца-Ньютона $f(z) = \int\limits_0^z f'(\tau)d\tau + f(0)$ маємо $M(r,f) \le M(r,f') + |f(0)|$. Звідси випливає, що в (6) замість $M(r,f)$ можна поставити $M(r,f')$ і, отже, максимальний член $\mu(r,f')$ степеневого розвинення похідної f'. Оскільки з умови (6) випливає, що $0 < h_1\mu(r,f') \le \mu(r, D_l^{(1)}f) \le h_2\mu(r,f') < +\infty$, то лему 1 доведено. □

Вважаючи, що $R[f*g] = 1$, як показано в [4], за умови (6) маємо рівності $\varrho^*[D_l^{(n)}f * D_l^{(n)}g] = \varrho^*[D_l^{(n)}(f*g)] = \varrho^*[f*g]$.

Для порядку $\varrho^*[f]$ аналітичної в одиничному крузі функції (1) правильна формула $\dfrac{\varrho^*[f]}{\varrho^*[f]+1} = \varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln^+\ln^+|f_n|}{\ln n}$. З цієї формули легко випливає, що $\dfrac{\varrho^*[f*g]}{\varrho^*[f*g]+1} \le \max\left\{\dfrac{\varrho^*[f]}{\varrho^*[f]+1}, \dfrac{\varrho^*[g]}{\varrho^*[g]+1}\right\}$, а оскільки функція $x/(x+1)$ зростаюча, то $\varrho^*[f*g] \le \max\{\varrho^*[f], \varrho^*[g]\}$ (обернена нерівність у загальному неправильна). Тому через $W\{\varrho\}$ позначимо клас аналітичних в $\mathbb{D}$ функцій, для яких виконується умова (5).

Теорема 2. *Нехай $f \in W\{\varrho_1\}$ і $g \in W\{\varrho_2\}$. Якщо $\varlimsup\limits_{k\to\infty}|f_k g_k| > 0$, то за умови (6) $D_l^{(n)}f * D_l^{(n)}g \in W\{\max\{\varrho_1, \varrho_2\}\}$ і $D_l^{(n)}(f*g) \in W\{\max\{\varrho_1,\varrho_2\}\}$ для кожного $n \ge 0$.*

Доведення. З огляду на наведені вище твердження, як і в доведенні теореми 1, досить дослідити належність до $W\{\max\{\varrho_1, \varrho_2\}\}$ функції $\ln\mu(r, f*g)$.

Оскільки $\mu(r, f*g) \le \mu(\sqrt{r}, f)\mu(\sqrt{r}, g)$, то

$$\int\limits_0^1(1-r)^{\max\{\varrho_1,\varrho_2\}-1}\ln^+\mu(r,f*g)dr \le \int\limits_0^1(1-r)^{\varrho_1-1}\ln^+\mu(\sqrt{r},f)dr$$
$$+\int\limits_0^1(1-r)^{\varrho_2-1}\ln^+\mu(\sqrt{r},g)dr + \int\limits_0^1(1-r)^{\max\{\varrho_1,\varrho_2\}-1}\ln 2dr$$
$$=\int\limits_0^1 2r(1-r^2)^{\varrho_1-1}\ln^+\mu(r,f)dr + \int\limits_0^1 2r(1-r^2)^{\varrho_2-1}\ln^+\mu(r,g)dr + \text{const}$$
$$\le 2^{\varrho_1}\int\limits_0^1(1-r)^{\varrho_1-1}\ln^+\mu(r,f)dr + 2^{\varrho_1}\int\limits_0^1(1-r)^{\varrho_2-1}\ln^+\mu(r,g)dr + \text{const}.$$

тобто теорему 2 доведено. □

Література

1. Бибербах Л. Аналитическое продолжение. — М.: Наука, 1967. — 239 с.
2. Галь Ю.М, Шеремета М.Н. *Принадлежность аналитических функций классу сходимости* // Докл. АН УССР, сер. А. — 1985. — №7. — С. 11–14.
3. Гельфонд А.О., Леонтьев А.Ф. *Об одном обобщении ряда Фурье* // Матем. сб. — 1957. — Т.23, №3. — С. 477–500.
4. Луговая Л.Л., Мулява О.М., Шеремета М.Н. *Свойства адамаровских композиций производных Гельфонда-Леонтьева аналитических функций* // Уфимский матем. журн. — 2010. — Т.2, №2. — С. 90–101.
5. Мулява О.М., Шеремета М.М. *Про належність похідної Гельфонда-Леонтьєва до класу збіжності* Наук. вісник Чернівецьк. у-ту. — 2009. — Вип. 485. — С. 71–77.
6. Hadamard J. *Theoreme sur le series entieres*, Acta math., **22**, (1899), 55–63.
7. Hadamard J. *La serie de Taylor et son prolongement analytique*, Scientia phys.-math., **12**, (1901), 42–63.
8. Valiron G. General theory of integral functions, Toulouse, 1923.

[1] Національний університет харчових технологій,
Київ, Україна
e-mail: *info@nuft.edu.ua*

[2] Львівський національний університет імені Івана Франка,
Львів, Україна
e-mail: *m_m_sheremeta@list.ru*

Надійшло 20.02.2012

Mulyava O.M., Sheremeta M.M. *Belonging to convergence classes of Hadamard compositions of Gelfond-Leont'ev derivatives for analytic functions*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 111–115.

The conditions are found, under which the belonging to Valiron convergence class of entire functions f and g implies the belonging to this class of Gelfond-Leont'ev derivative of Hadamard composition of functions f and g and of Hadamard composition of Gelfond-Leont'ev derivatives of these functions. Analogous problem is solved for analytic functions in the unit disk.

Мулява О.М., Шеремета М.Н. *Принадлежность классам сходимости адамаровских композиций производных Гельфонда-Леонтьева аналитических функций* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 111–115.

Найдены условия, при выполнении которых из принадлежности валироновскому классу сходимости целых функций f и g вытекает принадлежность этому классу производной Гельфонда-Леонтьева адамаровской композиции функций f и g и адамаровской композиции производных Гельфонда-Леонтьева этих функций. Аналогичная задача решена для аналитических в единичном круге функций.

Карпатські математичні публікації. Т.4, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №1

УДК 517.956

Самусенко П.Ф.

ДО ПИТАННЯ ПРО КАНОНІЧНІ ФОРМИ РЕГУЛЯРНОЇ В'ЯЗКИ МАТРИЦЬ

Самусенко П.Ф. *До питання про канонічні форми регулярної в'язки матриць* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — С. 116–124.

У роботі розроблено алгоритм локального зведення регулярної в'язки матриць до канонічного вигляду.

Вступ

Різноманітні задачі теоретичної механіки, алгебри, теорії наближень, теорії диференціальних рівнянь приводять до розгляду певних канонічних форм матриць та їх в'язок. При цьому структура канонічної форми повинна дозволяти провести класифікацію випадків задачі, що розглядається, та ефективно знайти її розв'язок.

Зокрема, в теорії диференціальних рівнянь суттєво використовується жорданова форма матриці, що пов'язано зі структурою фундаментальної матриці системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. У випадку, коли елементи матриці коефіцієнтів системи є довільними достатньо гладкими функціями, то доволі часто локальні властивості її розв'язків подібні до властивостей розв'язків певної системи зі сталими коефіцієнтами. Так, у працях [4, 5, 6] наведено алгоритми побудови формальних розв'язків систем диференціальних рівнянь з особливими точками, сингулярно збурених систем та систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь з особливими точками, що грунтуються на структурі жорданової форми граничної матриці відповідної задачі. При цьому в окремих точках структура матриці коефіцієнтів зазначених систем може змінюватись (наприклад, тип елементарних дільників). Такий підхід дозволяє з'ясувати асимптотичні властивості розв'язків систем зі змінними коефіцієнтами, спираючись на аналогічні властивості систем з граничними (сталими) матрицями.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 34E10.

Ключові слова і фрази: регулярна в'язка матриць, канонічна форма.

1 Випадок локального зведення регулярної в'язки матриць до канонічного вигляду

У даній праці, використовуючи ідеї Y. Sibuya, наведено теореми про зведення регулярної в'язки матриць до канонічного вигляду [1]. При цьому є істотною лише структура відповідної граничної в'язки. Зазначимо, що одержані результати дозволяють ефективно досліджувати асимптотичні властивості сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з різного роду виродженнями.

Теорема 1. *Нехай $A(t)$, $B(t) \in C^m[0;T]$, в'язка $A(0) - \lambda B(0)$ регулярна, має r попарно різних власних значень кратності $p_1, \ldots, p_r$, яким відповідають r скінченних елементарних дільників такої ж кратності та s нескінченних елементарних дільників кратності $q_1, \ldots, q_s$ відповідно, причому $p_1 + \ldots + p_r + q_1 + \ldots + q_s = n$. Тоді існують такі неособливі матриці $P(t)$, $Q(t) \in C^m[0;t_0]$, $t_0 \leq T$, що*

$$P(t)A(t)Q(t) = \widetilde{A}(t) \equiv diag\{E_q(t), W_p(t)\}, \tag{1}$$

$$P(t)B(t)Q(t) = \widetilde{B}(t) \equiv diag\{J_q(t), E_p(t)\}, \tag{2}$$

де

$$W_p(t) = diag\{W_1(t), \ldots, W_r(t)\}, \ E_p(t) = diag\{E_1(t), \ldots, E_r(t)\},$$

$$E_q(0) = E_q, \ E_i(0) = E_i, \ i = \overline{1,r}; \ J_q(0) = J_q \equiv diag\{J_1, \ldots, J_s\};$$

$$W_i(0) = W_i, \ i = \overline{1,r},$$

$$W_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \ i = \overline{1,r}, \ J_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ j = \overline{1,s},$$

λ_i, $i = \overline{1,r}$, — власні значення в'язки $A(0) - \lambda B(0)$, E_i — одинична матриця відповідного порядку, $p = p_1 + \ldots + p_r$, $q = q_1 + \ldots + q_s$.

Доведення. Нехай

$$A(t) = A(0) + D(t), \ B(t) = B(0) + F(t), \ \widetilde{A}(t) = \widetilde{A}(0) + U(t), \ \widetilde{B}(t) = \widetilde{B}(0) + V(t). \tag{3}$$

Тоді $D(0) = F(0) = U(0) = V(0) = 0$. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $A(0) = \widetilde{A}(0)$, $B(0) = \widetilde{B}(0)$. Матриці $P(t)$, $Q(t)$ визначаємо із системи рівнянь

$$P(t)A(t)Q(t) = \widetilde{A}(t), \ P(t)B(t)Q(t) = \widetilde{B}(t). \tag{4}$$

Покладемо

$$P(t) = E + R(t), \ Q(t) = E + S(t), \tag{5}$$

де E — одинична матриця n-го порядку. За побудовою $R(0) = S(0) = 0$.

Підставляючи (3), (5) до системи (4), дістаємо

$$\widetilde{A}(0)S(t)+R(t)\widetilde{A}(0)+D(t)+D(t)S(t)+R(t)\widetilde{A}(0)S(t)+R(t)D(t)+R(t)D(t)S(t)-U(t)=0, \tag{6}$$

$$\widetilde{B}(0)S(t)+R(t)\widetilde{B}(0)+F(t)+F(t)S(t)+R(t)\widetilde{B}(0)S(t)+R(t)F(t)+R(t)F(t)S(t)-V(t)=0. \tag{7}$$

Нехай

$$U(t)=diag\{U_q(t),U_p(t)\},\ U_p(t)=diag\{U_2(t),...,U_{r+1}(t)\},$$

$$V(t)=diag\{V_q(t),V_p(t)\},\ V_p(t)=diag\{V_2(t),...,V_{r+1}(t)\},$$

$$D(t)=\begin{pmatrix} D_{11}(t) & D_{12}(t) & \dots & D_{1,r+1}(t)\\ D_{21}(t) & D_{22}(t) & \dots & D_{2,r+1}(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ D_{r+1,1}(t) & D_{r+1,2}(t) & \dots & D_{r+1,r+1}(t)\end{pmatrix},$$

$$F(t)=\begin{pmatrix} F_{11}(t) & F_{12}(t) & \dots & F_{1,r+1}(t)\\ F_{21}(t) & F_{22}(t) & \dots & F_{2,r+1}(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ F_{r+1,1}(t) & F_{r+1,2}(t) & \dots & F_{r+1,r+1}(t)\end{pmatrix},$$

де $U_1(t)=U_q(t)$, $V_1(t)=V_q(t)$ та $U_i(t)$, $V_i(t)$, $i=\overline{2,r+1}$, — квадратні матриці відповідно q-го та p_i-го порядку; $D_{1j}(t)$, $F_{1j}(t)$ $j=\overline{2,r+1}$, та $D_{i1}(t)$, $F_{i1}(t)$, $i=\overline{2,r+1}$, — прямокутні матриці розмірів $q\times p_j$ та $p_i\times q$; $D_{ij}(t)$, $F_{ij}(t)$, $i,j=\overline{2,r+1}$, — прямокутні матриці розмірів $p_i\times p_j$. Покладемо

$$S(t)=\begin{pmatrix} 0 & S_{12}(t) & \dots & S_{1,r+1}(t)\\ S_{21}(t) & 0 & \dots & S_{2,r+1}(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ S_{r+1,1}(t) & S_{r+1,2}(t) & \dots & 0\end{pmatrix},\ R(t)=\begin{pmatrix} 0 & R_{12}(t) & \dots & R_{1,r+1}(t)\\ R_{21}(t) & 0 & \dots & R_{2,r+1}(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ R_{r+1,1}(t) & R_{r+1,2}(t) & \dots & 0\end{pmatrix},$$

$S_{ij}(t)$, $R_{ij}(t)$, $i,j=\overline{1,r+1}$, — прямокутні матриці таких же розмірів, що й $D_{ij}(t)$, $F_{ij}(t)$. Тоді із системи (6), (7) дістаємо

$$U_i(t)=D_{ii}(t)+\sum_{j=1,\ j\neq i}^{r+1}D_{ij}(t)S_{ji}(t)+\sum_{j=1,\ j\neq i}^{r+1}R_{ij}(t)\widetilde{A}_{jj}(0)S_{ji}(t)$$
$$+\sum_{j=1,\ j\neq i}^{r+1}R_{ij}(t)D_{ji}(t)+\sum_{j=1,\ j\neq i}^{r+1}R_{ij}(t)\sum_{k=1,\ k\neq i}^{r+1}D_{jk}(t)S_{ki}(t),$$

$$V_i(t)=F_{ii}(t)+\sum_{j=1,\ j\neq i}^{r+1}F_{ij}(t)S_{ji}(t)+\sum_{j=1,\ j\neq i}^{r+1}R_{ij}(t)\widetilde{B}_{jj}(0)S_{ji}(t)$$
$$+\sum_{j=1,\ j\neq i}^{r+1}R_{ij}(t)F_{ji}(t)+\sum_{j=1,\ j\neq i}^{r+1}R_{ij}(t)\sum_{k=1,\ k\neq i}^{r+1}F_{jk}(t)S_{ki}(t),$$

$i=\overline{1,r+1}$, та

$$\widetilde{A}_{ii}(0)S_{ij}(t)+R_{ij}(t)\widetilde{A}_{jj}(0)+D_{ij}(t)+\sum_{k=1,\ k\neq j}^{r+1}D_{ik}(t)S_{kj}(t)$$
$$+\sum_{k=1,k\neq i,k\neq j}^{r+1}R_{ik}(t)\widetilde{A}_{kk}(0)S_{kj}(t)+\sum_{k=1,\ k\neq i}^{r+1}R_{ik}(t)D_{kj}(t)+\sum_{k=1,\ k\neq i}^{r+1}R_{ik}(t)\sum_{l=1,\ l\neq j}^{r+1}D_{kl}(t)S_{lj}(t)=0, \tag{8}$$

$$\widetilde{B}_{ii}(0)S_{ij}(t)+R_{ij}(t)\widetilde{B}_{jj}(0)+F_{ij}(t)+\sum_{k=1,\ k\neq j}^{r+1}F_{ik}(t)S_{kj}(t)$$
$$+\sum_{k=1,k\neq i,k\neq j}^{r+1}R_{ik}(t)\widetilde{B}_{kk}(0)S_{kj}(t)+\sum_{k=1,\ k\neq i}^{r+1}R_{ik}(t)F_{kj}(t)+\sum_{k=1,\ k\neq i}^{r+1}R_{ik}(t)\sum_{l=1,\ l\neq j}^{r+1}F_{kl}(t)S_{lj}(t)=0, \tag{9}$$

$i\neq j$, $i,j=\overline{1,r+1}$.

Згідно [3], якобіан системи (8), (9) в точці $t=0$ відмінний від нуля. А тому існує таке t_0, $t_0\leq T$, що система (8), (9) відносно $S_{ij}(t)$, $R_{ij}(t)$, $i\neq j$, $i,j=\overline{1,r+1}$, сумісна для всіх $t\in[0;t_0]$. При цьому $S_{ij}(t)$, $R_{ij}(t)\in C^m[0;t_0]$. Теорему доведено. □

Припустимо, що елементи матриць $A(t)$ та $B(t)$ на відрізку $[0;T]$ допускають асимптотичні розвинення за степенями t, тобто

$$A(t)=\sum_{s\geq 0}A^{(s)}t^s,\ B(t)=\sum_{s\geq 0}B^{(s)}t^s. \tag{10}$$

Тоді такою ж властивістю володіють елементи матриць $P(t)$ та $Q(t)$. Справді, шукатимемо $P(t)$ та $Q(t)$ у вигляді

$$P(t)=\sum_{s\geq 0}P^{(s)}t^s,\ Q(t)=\sum_{s\geq 0}Q^{(s)}t^s, \tag{11}$$

з невизначеними поки що коефіцієнтами $P^{(s)}$, $Q^{(s)}$, $s\geq 0$.

За побудовою

$$A(0)=A^{(0)},\ D(t)=\sum_{s\geq 1}A^{(s)}t^s,\ B(0)=B^{(0)},\ F(t)=\sum_{s\geq 1}B^{(s)}t^s.$$

Нехай

$$P^{(0)}=E,\ R(t)=\sum_{s\geq 1}P^{(s)}t^s,\ Q^{(0)}=E,\ S(t)=\sum_{s\geq 1}Q^{(s)}t^s,$$

$$U(t)=\sum_{s\geq 1}U^{(s)}t^s,\ V(t)=\sum_{s\geq 1}V^{(s)}t^s.$$

Тоді, зрівнюючи в системі (6), (7) коефіцієнти при однакових степенях t, дістаємо

$$A^{(0)}Q^{(s)}+P^{(s)}A^{(0)}+A^{(s)}+\sum_{n=1}^{s-1}A^{(n)}Q^{(s-n)}+\sum_{n=1}^{s-1}P^{(n)}A^{(0)}Q^{(s-n)}$$

$$+\sum_{n=1}^{s-1} P^{(n)} A^{(s-n)} + \sum_{n=1}^{s-2}\sum_{l=1}^{s-n-1} P^{(n)} A^{(l)} Q^{(s-n-l)} - U^{(s)} = 0$$

та

$$B^{(0)}Q^{(s)} + P^{(s)}B^{(0)} + B^{(s)} + \sum_{n=1}^{s-1} B^{(n)} Q^{(s-n)} + \sum_{n=1}^{s-1} P^{(n)} B^{(0)} Q^{(s-n)}$$

$$+\sum_{n=1}^{s-1} P^{(n)} B^{(s-n)} + \sum_{n=1}^{s-2}\sum_{l=1}^{s-n-1} P^{(n)} B^{(l)} Q^{(s-n-l)} - V^{(s)} = 0,$$

$s \in N$.

Вважаючи, що структура матриць $D(t)$, $F(t)$, $R(t)$ та $S(t)$ така ж, як і в теоремі 1, аналогічно отримаємо

$$U_i^{(s)} = A_{ii}^{(s)} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-1} A_{ij}^{(s)} Q_{ji}^{(s-n)} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-1} P_{ij}^{(n)} A_{jj}^{(0)} Q_{ji}^{(s-n)}$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-1} P_{ij}^{(n)} A_{ji}^{(s-n)} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r+1}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-2}\sum_{l=1}^{s-n-1} P_{ij}^{(n)} A_{jk}^{(l)} Q_{ki}^{(s-n-l)},$$

$$V_i^{(s)} = B_{ii}^{(s)} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-1} B_{ij}^{(s)} Q_{ji}^{(s-n)} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-1} P_{ij}^{(n)} B_{jj}^{(0)} Q_{ji}^{(s-n)}$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-1} P_{ij}^{(n)} B_{ji}^{(s-n)} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r+1}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-2}\sum_{l=1}^{s-n-1} P_{ij}^{(n)} B_{jk}^{(l)} Q_{ki}^{(s-n-l)},$$

$i = \overline{1, r+1}$, $s \in N$, та

$$A_{ii}^{(0)} Q_{ij}^{(s)} + P_{ij}^{(s)} A_{jj}^{(0)} + A_{ij}^{(s)} + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-1} A_{ik}^{(n)} Q_{kj}^{(s-n)} + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i, k\neq j}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-1} P_{ik}^{(n)} A_{kk}^{(0)} Q_{kj}^{(s-n)}$$

$$+\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-1} P_{ik}^{(n)} A_{kj}^{(s-n)} + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{r+1}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-2}\sum_{l=1}^{s-n-1} P_{ik}^{(n)} A_{km}^{(l)} Q_{mj}^{(s-n-l)} = 0, \qquad (12)$$

$$B_{ii}^{(0)} Q_{ij}^{(s)} + P_{ij}^{(s)} B_{jj}^{(0)} + B_{ij}^{(s)} + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-1} B_{ik}^{(n)} Q_{kj}^{(s-n)} + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i, k\neq j}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-1} P_{ik}^{(n)} B_{kk}^{(0)} Q_{kj}^{(s-n)}$$

$$+\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-1} P_{ik}^{(n)} B_{kj}^{(s-n)} + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{r+1}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{r+1}\sum_{n=1}^{s-2}\sum_{l=1}^{s-n-1} P_{ik}^{(n)} B_{km}^{(l)} Q_{mj}^{(s-n-l)} = 0, \qquad (13)$$

$i \neq j$, $i, j = \overline{1, r+1}$, $s \in N$.

Система (12), (13) відносно $Q_{ij}^{(s)}$, $P_{ij}^{(s)}$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, r+1}$, $s \in N$, сумісна для всіх $t \in [0; T]$ [3].

Покладемо

$$P_m(t) = \sum_{s=0}^{m} P^{(s)} t^s, \quad Q_m(t) = \sum_{s=0}^{m} Q^{(s)} t^s.$$

За побудовою матриці $P_m(t)$, $Q_m(t)$ задовольняють систему (6), (7) з точністю $O(t^{m+1})$. Тоді з такою ж точністю задовольняють зазначену систему і матриці $P(t) - P_m(t)$, $Q(t) - Q_m(t)$.

Нехай $\widetilde{P}(t) = P(t) - P_m(t)$, $\widetilde{Q}(t) = Q(t) - Q_m(t)$. Тоді

$$A^{(0)}\widetilde{Q}(t) + \widetilde{P}(t)A^{(0)} + D(t)\widetilde{Q}(t) + \widetilde{P}(t)A^{(0)}\widetilde{Q}(t) + \widetilde{P}(t)D(t)$$
$$+\widetilde{P}(t)D(t)\widetilde{Q}(t) + U(t) - U_m(t) + O(t^{m+1}) = 0, \qquad (14)$$
$$B^{(0)}\widetilde{Q}(t) + \widetilde{P}(t)B^{(0)} + F(t)\widetilde{Q}(t) + \widetilde{P}(t)B^{(0)}\widetilde{Q}(t) + \widetilde{P}(t)F(t)$$
$$+\widetilde{P}(t)F(t)\widetilde{Q}(t) + V(t) - V_m(t) + O(t^{m+1}) = 0, \qquad (15)$$

де $U_m(t)$ та $V_m(t)$ — діагональні матриці вигляду

$$U_m(t) = \sum_{s=0}^{m} U^{(s)} t^s, \quad V_m(t) = \sum_{s=0}^{m} V^{(s)} t^s.$$

Оскільки система (14), (15) структурно ідентична системі (6), (7), то існує таке t_0, $t_0 \leq T$, що система (14), (15) відносно $\widetilde{P}(t)$, $\widetilde{Q}(t)$ сумісна для всіх $t \in [0; t_0]$. При цьому $\widetilde{P}(t) = O(t^{m+1})$ та $\widetilde{Q}(t) = O(t^{m+1})$.

Отже, на відрізку $[0; t_0]$, $t_0 \leq T$, мають місце асимптотичні розвинення (11) [2].

Наслідок 1.1. *Нехай елементи матриць $A(t)$, $B(t)$ на відрізку $[0; T]$ допускають асимптотичні розвинення (10), в'язка $A(0) - \lambda B(0)$ регулярна, має r попарно різних власних значень кратності p_1, ..., p_r, яким відповідають r скінченних елементарних дільників такої ж кратності та s нескінченних елементарних дільників кратності q_1, ..., q_s відповідно, причому $p_1 + ... + p_r + q_1 + ... + q_s = n$. Тоді існують неособливі матриці $P(t)$, $Q(t)$, $t \in [0; t_0]$, $t_0 \leq T$, для яких мають місце рівності (1), (2). При цьому елементи $P(t)$, $Q(t)$ на відрізку $[0; t_0]$ допускають асимптотичні розвинення (11).*

Якщо деякі власні значення в'язки $A(0) - \lambda B(0)$ однакові, то аналогічно доводяться такі твердження.

Теорема 2. *Нехай $A(t)$, $B(t) \in C^m[0; T]$, в'язка $A(0) - \lambda B(0)$ регулярна, має r скінченних та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких відповідно дорівнюють p_1, ..., p_r та q_1, ..., q_s, причому $p_1 + ... + p_r + q_1 + ... + q_s = n$. Тоді існують такі неособливі матриці $P(t)$, $Q(t) \in C^m[0; t_0]$, $t_0 \leq T$, що*

$$P(t)A(t)Q(t) = \widetilde{A}(t) \equiv diag\{E_q(t), W_p(t)\}, \qquad (16)$$

$$P(t)B(t)Q(t) = \widetilde{B}(t) \equiv diag\{J_q(t), E_p(t)\}, \qquad (17)$$

де $E_q(0) = E_q$, $E_p(0) = E_p$; $J_q(0) = J_q \equiv diag\{J_1, ..., J_s\}$; $W_p(0) = W_p \equiv diag\{W_1, ..., W_r\}$, $p = p_1 + ... + p_r$, $q = q_1 + ... + q_s$.

Наслідок 1.2. *Нехай елементи матриць $A(t)$, $B(t)$ на відрізку $[0;T]$ допускають асимптотичні розвинення (10), в'язка $A(0)-\lambda B(0)$ регулярна, має r скінченних та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких відповідно дорівнюють p_1, ..., p_r та q_1, ..., q_s, причому $p_1+...+p_r+q_1+...+q_s=n$. Тоді існують неособливі матриці $P(t)$, $Q(t)$, $t\in[0;t_0]$, $t_0\le T$, для яких мають місце рівності (16), (17). При цьому елементи $P(t)$, $Q(t)$ на відрізку $[0;t_0]$ допускають асимптотичні розвинення (11).*

Наведені вище теореми можна узагальнити для випадку регулярної в'язки матриць $A(t,\varepsilon)-\lambda B(t,\varepsilon)$, елементи яких визначені на множині

$$\overline{K}=\{(t,\varepsilon):0\le t\le T,\ 0\le\varepsilon\le\varepsilon_0\}.$$

Теорема 3. *Нехай $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)\in C^m(\overline{K})$, в'язка $A(0,0)-\lambda B(0,0)$ регулярна, має r попарно різних власних значень кратності p_1, ..., p_r, яким відповідають r скінченних елементарних дільників такої ж кратності та s нескінченних елементарних дільників кратності q_1, ..., q_s відповідно, причому $p_1+...+p_r+q_1+...+q_s=n$. Тоді існують такі неособливі матриці $P(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon)\in C^m(\overline{K}_1)$ $((0,0)\in\overline{K}_1\subset\overline{K})$, що*

$$P(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon)=\widetilde{A}(t,\varepsilon)\equiv diag\{E_q(t,\varepsilon),W_p(t,\varepsilon)\},\tag{18}$$

$$W_p(t,\varepsilon)=diag\{W_1(t,\varepsilon),...,W_r(t,\varepsilon)\},$$

$$P(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon)=\widetilde{B}(t,\varepsilon)\equiv diag\{J_q(t,\varepsilon),E_p(t,\varepsilon)\},\tag{19}$$

$$E_p(t,\varepsilon)=diag\{E_1(t,\varepsilon),...,E_r(t,\varepsilon)\},$$

де $E_q(0,0)=E_q$, $E_i(0,0)=E_i$, $i=\overline{1,r}$; $J_q(0,0)=J_q\equiv diag\{J_1,...,J_s\}$; $W_i(0,0)=W_i$, $i=\overline{1,r}$, $p=p_1+...+p_r$, $q=q_1+...+q_s$.

Доведення. Скористаємось схемою доведення теореми 1. Отже, нехай $A(t,\varepsilon)=A(0,0)+D(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)=B(0,0)+F(t,\varepsilon)$, $\widetilde{A}(t,\varepsilon)=\widetilde{A}(0,0)+U(t,\varepsilon)$, $\widetilde{B}(t,\varepsilon)=\widetilde{B}(0,0)+V(t,\varepsilon)$. Тоді $D(0,0)=F(0,0)=U(0,0)=V(0,0)=0$. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $A(0,0)=\widetilde{A}(0,0)$, $B(0,0)=\widetilde{B}(0,0)$.

Як і раніше, матриці $R(t,\varepsilon)$, $S(t,\varepsilon)$ визначаються із системи рівнянь

$$P(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon)=\widetilde{A}(t,\varepsilon),\ P(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon)=\widetilde{B}(t,\varepsilon).\tag{20}$$

Покладаючи $P(t,\varepsilon)=E+R(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon)=E+S(t,\varepsilon)$, і вважаючи, що матриці $R(t,\varepsilon)$ та $S(t,\varepsilon)$ мають таку ж структуру, що й в теоремі 1, аналогічно показуємо сумісність системи (20) на множині $\overline{K}_1$. Теорему доведено. □

Теорема 4. *Нехай $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)\in C^m(\overline{K})$, в'язка $A(0,0)-\lambda B(0,0)$ регулярна, має r скінченних та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких відповідно дорівнюють p_1, ..., p_r та q_1, ..., q_s, причому $p_1+...+p_r+q_1+...+q_s=n$. Тоді існують такі неособливі матриці $P(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon)\in C^m(\overline{K}_1)$ $((0,0)\in\overline{K}_1\subset\overline{K})$, що*

$$P(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon)=\widetilde{A}(t,\varepsilon)\equiv diag\{E_q(t,\varepsilon),W_p(t,\varepsilon)\},\tag{21}$$

$$P(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon)=\widetilde{B}(t,\varepsilon)\equiv diag\{J_q(t,\varepsilon),E_p(t,\varepsilon)\},\tag{22}$$

де $E_q(0,0)=E_q$, $E_p(0,0)=E_p$; $J_q(0,0)=J_q\equiv diag\{J_1,...,J_s\}$; $W_p(0,0)=W_p\equiv diag\{W_1,...,W_r\}$, $p=p_1+...+p_r$, $q=q_1+...+q_s$.

2 НЕЛОКАЛЬНИЙ ВИПАДОК

Нехай тепер кронекерова структура в'язки $A(t,0)-\lambda B(t,0)$ залишається незмінною на відрізку $[0;T]$ [1]. Тоді вірне таке твердження.

Наслідок 2.1. *Нехай $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)\in C^m(\overline{K})$, на відрізку $[0;T]$ в'язка $A(t,0)-\lambda B(t,0)$ регулярна, має r попарно різних власних значень кратності p_1, ..., p_r, яким відповідають r скінченних елементарних дільників такої ж кратності та s нескінченних елементарних дільників кратності q_1, ..., q_s відповідно, причому $p_1+...+p_r+q_1+...+q_s=n$. Тоді існують неособливі матриці $P(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon)\in C^m(\overline{K}_2)$,*

$$\overline{K}_2=\{(t,\varepsilon):0\le t\le T,\ 0\le\varepsilon\le\varepsilon_1\},\ \varepsilon_1\le\varepsilon_0,$$

для яких мають місце рівності (18), (19).

Доведення. Покладемо

$$A(t,\varepsilon)=A(t,0)+D(t,\varepsilon),\ B(t,\varepsilon)=B(t,0)+F(t,\varepsilon),$$

$$\widetilde{A}(t,\varepsilon)=\widetilde{A}(t,0)+U(t,\varepsilon),\ \widetilde{B}(t,\varepsilon)=\widetilde{B}(t,0)+V(t,\varepsilon).$$

Тоді $D(t,0)=F(t,0)=U(t,0)=V(t,0)=0$. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $A(t,0)=\widetilde{A}(t,0)$, $B(t,0)=\widetilde{B}(t,0)$. Покладаючи $P(t,\varepsilon)=E+R(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon)=E+S(t,\varepsilon)$, і вважаючи, що матриці $R(t,\varepsilon)$ та $S(t,\varepsilon)$ мають таку ж структуру, що й в теоремі 1, аналогічно показуємо сумісність системи (20) на множині $\overline{K}_2$. Наслідок доведено. □

Наслідок 2.2. *Нехай на множині $\overline{K}$ елементи $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$ допускають рівномірні асимптотичні розвинення*

$$A(t,\varepsilon)=\sum_{s\ge0}A_s(t)\varepsilon^s,\ B(t,\varepsilon)=\sum_{s\ge0}B_s(t)\varepsilon^s,$$

і мають неперервні частинні похідні за змінною t до m-го порядку включно, в'язка $A(t,0)-\lambda B(t,0)$ регулярна, має r попарно різних власних значень кратності p_1, ..., p_r, яким відповідають r скінченних елементарних дільників такої ж кратності та s нескінченних елементарних дільників кратності q_1, ..., q_s відповідно, причому $p_1+...+p_r+q_1+...+q_s=n$. Тоді існують неособливі матриці $P(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon)$, $(t,\varepsilon)\in\overline{K}_2$, для яких справджуються рівності (18), (19). При цьому елементи $P(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon)$ на множині $\overline{K}_2$ допускають рівномірні асимптотичні розвинення

$$P(t,\varepsilon)=\sum_{s\ge0}P_s(t)\varepsilon^s,\ Q(t,\varepsilon)=\sum_{s\ge0}Q_s(t)\varepsilon^s,$$

і мають неперервні частинні похідні за змінною t до m-го порядку включно.

Наслідок 2.3. *Нехай $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)\in C^m(\overline{K})$, на відрізку $[0;T]$ в'язка $A(t,0)-\lambda B(t,0)$ регулярна, має r скінченних та s нескінченних елементарних дільників, кратності яких відповідно дорівнюють p_1, ..., p_r та q_1, ..., q_s, причому $p_1+...+p_r+q_1+...+q_s=n$. Тоді існують неособливі матриці $P(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon)\in C^m(\overline{K}_2)$ для яких мають місце рівності (21), (22).*

Литература

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 576 с.
2. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983. — 352 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том I. — М.: Наука. 1969. — 608 с.
4. Iwano M. *Asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a small parameter. I*, Funkcialaj Ekvacioj. **5**, (1963), 71–134.
5. Iwano M. *Asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a small parameter. II*, Funkcialaj Ekvacioj. **6**, (1964), 89–141.
6. Sibuya Y. *Simplification of a system of linear ordinary differential equations about a singular point.* Funkcialaj Ekvacioj, **4**, (1962), 29–56.

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова,
Київ, Україна
e-mail: *psamusenko@ukr.net*

Надійшло 16.12.2011

Samusenko P.F. *About canonical forms of regular matrix pencil*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 116–124.

The algorithm of local reduction of the regular matrix pencil to canonical form is constructed in the article.

Самусенко П.Ф. *К вопросу о канонических формах регулярного пучка матриц* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 116–124.

В работе разработан алгоритм локального приведения регулярного пучка матриц к каноническому виду.

Карпатські математичні публікації. Т.4, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №1

УДК 517.9

Сидоренко Ю.М., Чвартацький О.І.

МАТРИЧНІ УЗАГАЛЬНЕННЯ ІНТЕГРОВНИХ СИСТЕМ З ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ ЗОБРАЖЕННЯМИ ЛАКСА

Сидоренко Ю.М., Чвартацький О.І. *Матричні узагальнення інтегровних систем з інтегро-диференціальними зображеннями Лакса* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4. №1. — С. 125–144.

Знайдені інтегро-диференціальні зображення Лакса для матричних моделей Деві-Стюартсона (DS-I, DS-II, DS-III), просторово-двовимірних узагальнень рівняння Чена-Лі-Лю та їх вищих симетрій. А саме, модифікованих рівнянь Кортевега-де Вріза, Нижника, тощо. Наведено деякі матричні багатовимірні узагальнення рівняння Бюргерса.

1 Вступ

1.1 Вихідні поняття та позначення

В цьому розділі ми стисло наводимо необхідні означення та поняття, пов'язані з алгеброю формальних символів псевдодиференціальних (мікродиференціальних) операторів (МДО, див., наприклад [16, 18, 22]).

Розглянемо над полем $\mathbb{C}$ лінійний простір ζ МДО вигляду

$$L \in \zeta = \left\{ \sum_{j=-\infty}^{n(L)} a_j D^j \; : \; n(L) \in \mathbb{Z} \right\}, \tag{1}$$

де коефіцієнти a_j є функціями "просторової" змінної $x = t_1$ і еволюційних параметрів $t_2, t_3, \ldots$. Коефіцієнти $a_j(t)$, $t = (t_1, t_2, \ldots)$, вважаються гладкими функціями векторної змінної t, яка має скінченну кількість компонент, і належать деякому функціональному простору A, який є диференціальною алгеброю стосовно звичайних арифметичних дій; $D := \frac{\partial}{\partial x}$ — оператор диференціювання.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 33Q58, 37K10, 37K15.
Ключові слова і фрази: матричні інтегровні системи, інтегро-диференціальні зображення Лакса, матричні рівняння Бюргерса.

Операції додавання і множення операторів на скаляри (елементи поля $\mathbb{C}$) вводяться так

$$\lambda_1 L_1 \pm \lambda_2 L_2 = \sum_{i=-\infty}^{N_1} \lambda_1 a_{1j} D^j \pm \sum_{j=-\infty}^{N_2} \lambda_2 a_{2j} D^j = \sum_{j=-\infty}^{\max(N_1,N_2)} (\lambda_1 a_{1j} \pm \lambda_2 a_{2j}) D^j, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

Структура алгебри Лі на лінійному просторі ζ (1) визначається комутатором Лі $[\cdot,\cdot] : \zeta \times \zeta \to \zeta$, $[L_1, L_2] = L_1 L_2 - L_2 L_1$, де композиція (операторне множення) МДО L_1 та L_2 індукується загальним правилом Лейбніца

$$D^n f := \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} f^{(j)} D^{n-j}. \tag{2}$$

$n \in \mathbb{Z}$, $f \in A \subset \zeta$, $f^{(j)} := \frac{\partial^j f}{\partial x^j} \in A \subset \zeta$, $D^n D^m = D^m D^n = D^{n+m}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, де $\binom{n}{0} := 1$, $\binom{n}{j} := \frac{n(n-1)\ldots(n-j+1)}{j!}$.

Формула (2) задає композицію оператора $D^n \in \zeta$ і оператора множення на функцію $f \in A \subset \zeta$ (як оператора нульового порядку) на відміну від позначення $D^k\{f\} := \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \in A$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Розглянемо мікродиференціальний оператор Лакса

$$L := W D W^{-1} = D + \sum_{j=1}^{\infty} U_j D^{-j}, \tag{3}$$

який параметризується нескінченною кількістю динамічних змінних $U_j = U_j(t_1, t_2, t_3, \ldots)$, $j \in \mathbb{N}$, що залежать від довільного (скінченного) числа незалежних змінних $t_1 := x$, t_2, t_3, ..., і диференціальним чином виражаються через функціональні коефіцієнти формального одягаючого оператора (оператора перетворення) Захарова-Шабата

$$W = I + \sum_{j=1}^{\infty} w_j D^{-j}. \tag{4}$$

Обернений до формального оператора W є оператор вигляду

$$W^{-1} = I + \sum_{j=1}^{\infty} a_j D^{-j}, \ W W^{-1} = W^{-1} W = I,$$

де коефіцієнти a_j, $j \in \mathbb{N}$ є диференціальними поліномами від коефіцієнтів w_k, $k \in \mathbb{N}$ оператора (4). В скалярному випадку ієрархія Кадомцева-Петвіашвілі — це комутативна сім'я еволюційних рівнянь Лакса для оператора (3)

$$\alpha_i L_{t_i} = [B_i, L] := B_i L - L B_i, \tag{5}$$

де $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i \in \mathbb{N}$, а оператор $B_i := (L^i)_+$ є диференціальною частиною i-ого степеня мікродиференціального символа L. Символом L_{t_i} позначається оператор вигляду

$$L_{t_i} := (W D W^{-1})_{t_i} = \sum_{j=1}^{\infty} (U_j)_{t_i} D^{-j}.$$

Під формально транспонованим та ермітово спряженими операторами відповідно розумітимемо вирази

$$L^{\tau} := -D + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j D^{-j} U_j^{\top}, \, L^* := \bar{L}^{\tau}.$$

Рівняння Захарова-Шабата (5) виникають у цьому підході внаслідок комутативності двох довільних потоків (5) при $i = m$ та $i = n$:

$$L_{t_m t_n} = L_{t_n t_m} \Longrightarrow [\alpha_n \partial_{t_n} - B_n, \alpha_m \partial_{t_m} - B_m] = \alpha_m B_{n t_m} - \alpha_n B_{m t_n} + [B_n, B_m] = 0.$$

1.2 Нелокальні симетрійні редукції KP-ієрархії

Розглянемо симетрійну k-редукцію оператора L [20, 26, 31, 32], яка є нелокальним узагальненням k-редукцій Гельфанда-Дікого

$$(L^k)_- := (L^k)_{<0} = \mathbf{q} \mathcal{M}_0 D^{-1} \mathbf{r}^{\top} = \int^x \mathbf{q}(x, t_2, t_3, \ldots) \mathcal{M}_0 \mathbf{r}^{\top}(s, t_2, t_3, \ldots) \cdot ds, \tag{6}$$

де $\mathrm{Mat}_{l \times l}(\mathbb{C}) \ni \mathcal{M}_0$ є сталою матрицею, а функції $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_l)$, $\mathbf{r} = (r_1, ..., r_l)$ є фіксованими розв'язками системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_n \mathbf{q}_{t_n} = B_n\{\mathbf{q}\}, \\ \alpha_n \mathbf{r}_{t_n} = -B_n^{\tau}\{\mathbf{r}\}, \end{cases} \tag{7}$$

де $n \in \mathbb{N}$. В правій частині формули (6) стоїть символ інтегрального оператора Вольтери з виродженим ядром. Формально транспонований оператор до оператора (6) матиме вигляд $((L^k)_-)^{\tau} = -\mathbf{r} \mathcal{M}_0^{\top} D^{-1} \mathbf{q}^{\top}$.

Редукційні обмеження (6) накладають нелокальні в'язі на функціональні коефіцієнти оператора L і розв'язки еволюційних рівнянь (7), сумісні з динамікою в силу рівнянь Лакса (5). Редуковані потоки (5), (6), (7) допускають операторне зображення Лакса вигляду

$$[L_k, M_n] = 0, \text{ де } L_k = B_k + \mathbf{q} \mathcal{M}_0 D^{-1} \mathbf{r}^{\top}, \ M_n = \alpha_n \partial_{t_n} - B_n, \tag{8}$$

і є (1+1)-вимірними інтегровними системами для коефіцієнтів U_i , $i = \overline{1, k-1}$ і власних та спряжених власних функцій $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$:

$$\begin{cases} U_{i t_n} = P_{in}[U_1, U_2, ..., U_{k-1}, \mathbf{q}, \mathbf{r}], \\ \mathbf{q}_{t_n} = B_n[U_i, \mathbf{q}, \mathbf{r}]\{\mathbf{q}\}, \ \mathbf{r}_{t_n} = -B_n^{\tau}[U_i, \mathbf{q}, \mathbf{r}]\{\mathbf{r}\}, \end{cases} \tag{9}$$

де $i = \overline{1, k-1}$. P_{in}, B_n — диференціальні поліноми стосовно динамічних змінних, що вказані в квадратних дужках.

(2+1)-вимірні узагальнення зображень Лакса

$$[L_k, M_n] = 0, \tag{10}$$

де L_k є інтегро-диференціальним (2+1)-вимірним оператором вигляду

$$L_k = \alpha\partial_y - B_k - \mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{r}^\top,$$

а M_n в зображенні (10) є еволюційним стосовно змінної t_n, чисто диференціальним (без інтегральної складової) оператором порядку n відносно просторової змінної x

$$M_n = \alpha_n\partial_{t_n} - \sum_{j=1}^{n} v_j \mathcal{D}^j, \tag{11}$$

запропоновано в роботах [5, 7]. Серед рівнянь, які допускають операторні зображення (10)-(11), є, зокрема, важливі з точки зору фізичних застосувань, векторні (2+1)-вимірні узагальнення нелінійної моделі Деві-Стюартсона (DS-III, при $k=1, n=2$), Яджими-Ойкави ($k=2, n=2$) та рівнянь Мельникова ($k=2, n=3$) і розширена (2+1)-вимірна система Буснеска ($k=3, n=2$). Деякі з цих систем, як в розмірності (1+1), так і в розмірності (2+1), ми розглянемо в наступному розділі. Метод побудови точних розв'язків відповідних (1+1) та (2+1)-вимірних рівнянь Лакса (8)-(11) запропоновано в роботах [13, 34]. В кінці розділу 3 ми наводимо матричні узагальнення рівнянь Деві-Стюартсона [21] (DS-I, DS-II, пропущені в роботах [5, 7]), для яких обидва оператори в лаксовому зображенні (10) є інтегро-диференціальними. Альтернативні зображення для цих рівнянь в алгебрі чисто диференціальних операторів більш високої матричної розмірності можна знайти в роботі [17]. В розділі 4 ми розглядаємо інтегро-диференціальні зображення Лакса для матричного просторово-двовимірного узагальнення модифікованого рівняння Кортевега-де Вріза, рівняння Нижника та Вєсєлова-Новікова, які відсутні в роботі [17]. В розділі 5 ми пропонуємо, на наш погляд, нове просторово-двовимірне матричне узагальнення нелінійного рівняння Шредінгера, яке по аналогії з (1+1)-вимірним випадком можна назвати рівнянням Чена-Лі-Лю [16, 19]. Зауважимо, що при додатковій редукції в (2+1)-вимірній моделі Чена-Лі-Лю отримується просторово-двовимірне матричне узагальнення рівняння Бюргерса та його вища симетрія. У розділі 6 ми розглядаємо матричні та багатовимірні рівняння Бюргерса які є прикладом так званих C^2-інтегровних систем [27, 30].

В заключному розділі ми стисло окреслюємо можливість подальших застосувань результатів цієї роботи.

2 Нелінійні моделі КР-ієрархії з нелокальними в'язями та їх редукції

Розглянемо приклади рівнянь (8)-(9) та (10)-(11) для деяких k та n:

1. $k=1, n=2:$

$$\begin{aligned} L_1 &= D + \mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{q}^*, \\ M_2 &= \alpha_2\partial_{t_2} - D^2 - 2\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*, \end{aligned} \tag{12}$$

де $\alpha_2 \in i\mathbf{R}$, $\mathcal{M}_0^* = \mathcal{M}_0$. Рівняння $[L_1, M_2] = 0$ еквівалентне векторному узагальненню нелінійного рівняння Шредінгера $\alpha_2\mathbf{q}_{t_2} = \mathbf{q}_{xx} + 2(\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)\mathbf{q}$.

Тепер розглянемо (2+1)-вимірні узагальнення формальних виразів (12):

$$\begin{aligned} L_1 &= \partial_y - \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathcal{D}^{-1}\mathbf{q}^*, \\ M_2 &= \alpha_2\partial_{t_2} - c_1\mathcal{D}^2 - 2c_1 S_1, \end{aligned}$$

де $\alpha_2 \in i\mathbb{R}$, $S_1 = S_1(x,y,t_2) = \bar{S}_1(x,y,t_2)$, $c_1 \in \mathbb{R}$.

Операторне рівняння $[L_1, M_2] = 0$ еквівалентне третій моделі Деві-Стюартсона (DS-III):

$$\begin{cases} \alpha_2\mathbf{q}_{t_2} = c_1\mathbf{q}_{xx} - 2c_1 S_1\mathbf{q}, \\ S_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x. \end{cases} \tag{13}$$

З системи (13) при $y = x, l = 1$ отримаємо нелінійне рівняння Шредінгера, в зв'язку з чим ця система називається *просторово двовимірним l-компонентним узагальненням нелінійного рівняння Шредінгера.*

2. $k=1, n=3:$

$$\begin{aligned} L_1 &= D + \mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{q}^*, \\ M_3 &= \alpha_3\partial_{t_3} - D^3 - 3\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^* D - 3\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*. \end{aligned} \tag{14}$$

Операторне рівняння $[L_1, M_3] = 0$ еквівалентне системі

$$\alpha_3\mathbf{q}_{t_3} = \mathbf{q}_{xxx} + 3(\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)\mathbf{q}_x + 3(\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)\mathbf{q}. \tag{15}$$

Просторово-двовимірні узагальнення виразів (14) мають вигляд

$$\begin{aligned} L_1 &= \partial_y - \mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{q}^*, \\ M_3 &= \alpha_3\partial_{t_3} + c_1 D^3 - 3c_1 v_1 D - 3c_1 v_3, \end{aligned}$$

а операторне рівняння $[L_1, M_3] = 0$ еквівалентне такій системі:

$$\begin{cases} \alpha_3\mathbf{q}_{t_3} + c_1\mathbf{q}_{xxx} - 3c_1 v_1\mathbf{q}_x - 3c_1 v_3\mathbf{q} = 0, \\ v_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x, \ v_{3y} = (\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x. \end{cases} \tag{16}$$

Рівняння (15) є векторним узагальненням комплексного рівняння Кортевега-де Вріза (KdV), а система (16) є його (2+1)-вимірною версією.

3. $k=2, n=2:$ $L_2 = D^2 + 2u + \mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{q}^*$, $M_2 = \alpha_2\partial_{t_2} - D^2 - 2u$, де $\mathcal{M}_0^* = -\mathcal{M}_0$, $u = \bar{u}$, $\alpha_2 \in i\mathbf{R}$. Операторне рівняння $[L_2, M_2] = 0$ еквівалентне системі

$$\begin{cases} \alpha_2\mathbf{q}_{t_2} = \mathbf{q}_{xx} + 2u\mathbf{q}, \\ \alpha_2 u_{t_2} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x. \end{cases}$$

(2+1)-вимірні узагальнення формальних виразів L_2, M_2 матимуть вигляд

$$L_2 = i\partial_y - \mathcal{D}^2 - 2u - \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathcal{D}^{-1}\mathbf{q}^*,$$

$$M_2 = \alpha_2\partial_{t_2} - \mathcal{D}^2 - 2u,$$

де $\alpha_2 \in i\mathbb{R}$, $\mathcal{M}_0 = -\mathcal{M}_0^*$, $u = \bar{u}$.

Рівняння $[L_2, M_2] = 0$ можна записати еквівалентним чином у вигляді системи

$$\begin{cases} \alpha_2 u_{t_2} = iu_y + (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x, \\ \alpha_2\mathbf{q}_{t_2} = \mathbf{q}_{xx} + 2u\mathbf{q}. \end{cases} \tag{17}$$

Система (17) є l-компонентним просторово-двовимірним узагальненням рівнянь Яджими-Ойкави.

4. $k = 2, n = 3 : L_2 = D^2 + 2u + \mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{q}^*$, $M_3 = \alpha_3\partial_{t_3} - D^3 - 3uD - \frac{3}{2}(u_x + \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)$, де $\mathcal{M}_0 = -\mathcal{M}_0^*$, $u = \bar{u}$, $\alpha_3 \in \mathbf{R}$. Рівняння $[L_2, M_3] = 0$ еквівалентне системі

$$\begin{cases} \alpha_3\mathbf{q}_{t_3} = \mathbf{q}_{xxx} + 3u\mathbf{q}_x + \frac{3}{2}u_x\mathbf{q} + \frac{3}{2}\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*\mathbf{q}, \\ \alpha_3 u_{t_3} = \frac{1}{4}u_{xxx} + 3uu_x + \frac{3}{4}\left(\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{q}^* - \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}_x^*\right)_x. \end{cases}$$

Просторово-двовимірні узагальнення операторів L_2, M_3 мають такий вигляд

$$L_2 = i\partial_y - D^2 - 2u - \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathcal{D}^{-1}\mathbf{q}^*,$$
$$M_3 = \alpha_3\partial_{t_3} - D^3 - 3uD - \frac{3}{2}\left(u_x + iD^{-1}\{u_y\} + \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*\right),$$

де $\alpha_3 \in \mathbb{R}$, $\mathcal{M}_0^* = -\mathcal{M}_0$, $u = \bar{u}$. Рівняння $[L_2, M_3] = 0$ еквівалентне системі

$$\begin{cases} \alpha_3\mathbf{q}_{t_3} = \mathbf{q}_{xxx} + 3u\mathbf{q}_x + \frac{3}{2}\left(u_x + iD^{-1}\{u_y\} + \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*\right)\mathbf{q}, \\ \Big[\alpha_3 u_{t_3} - \frac{1}{4}u_{xxx} - 3uu_x + \frac{3}{4}\left(\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}_x^* - \mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*\right)_x \\ \qquad - \frac{3}{4}i\left(\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*\right)_y\Big]_x = -\frac{3}{4}u_{yy}. \end{cases}$$

3 Інтегро-диференціальні зображення Лакса для матричних узагальнень систем DS-I, DS-II, DS-III

Розглянемо такі узагальнення операторів L_1, M_2 (2):

$$L_1 = \partial_y - \mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{r}^\top,$$

$$M_2 = \alpha_2\partial_{t_2} - c_1 D^2 - c_2\partial_y^2 + 2c_1 S_1 + 2c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{r}_y^\top + 2c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{r}^\top\partial_y,$$

де $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x, y, t_2)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, t_2)$ та $S_1 = S_1(x, y, t_2)$ — матричні функції розмірностей $N \times M$ та $N \times N$ відповідно; $\mathcal{M}_0$ — стала матриця розмірності $M \times M$.

Операторне рівняння $[L_1, M_2] = 0$ еквівалентне системі

$$\begin{cases} \alpha_2\mathbf{q}_{t_2} = c_1\mathbf{q}_{xx} + c_2\mathbf{q}_{yy} - 2c_1 S_1\mathbf{q} - 2c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 S_2, \\ -\alpha_2\mathbf{r}_{t_2}^\top = c_1\mathbf{r}_{xx}^\top + c_2\mathbf{r}_{yy}^\top - 2c_1\mathbf{r}^\top S_1 - 2c_2 S_2\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top, \\ S_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_x, \ S_{2x} = (\mathbf{r}^\top\mathbf{q})_y. \end{cases} \tag{18}$$

При $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 \in i\mathbb{R}$ допустима редукція $\mathbf{r}^\top = \mathbf{q}^*$, $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0^*$, оператор M_2 буде ермітовим, а система (18) набуде вигляду

$$\begin{cases} \alpha_2\mathbf{q}_{t_2} = c_1\mathbf{q}_{xx} + c_2\mathbf{q}_{yy} - 2c_1 S_1\mathbf{q} - 2c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 S_2, \\ S_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x, \ S_{2x} = (\mathbf{q}^*\mathbf{q})_y. \end{cases} \tag{19}$$

Якщо у системі (19) покласти $c_2 = 0$, то отримаємо

$$\begin{cases} \alpha_2\mathbf{q}_{t_2} = c_1\mathbf{q}_{xx} - 2c_1 S_1\mathbf{q}, \\ S_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x. \end{cases} \tag{20}$$

При $c_1 = 0$ система (19) набуде вигляду

$$\begin{cases} \alpha_2\mathbf{q}_{t_2} = c_2\mathbf{q}_{yy} - 2c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 S_2, \\ S_{2x} = (\mathbf{q}^*\mathbf{q})_y. \end{cases} \tag{21}$$

Системи (20) та (21) є матричними узагальненнями моделі Деві-Стюартсона (DS-III) [2, 7, 24]. У випадку, коли $u := \mathbf{q}$, $\mathcal{M}_0 := \mu$ — скаляри, система (19) матиме вигляд

$$\begin{cases} \alpha_2 u_{t_2} = c_1 u_{xx} + c_2 u_{yy} - 2c_1 S_1 u - 2\mu c_2 S_2 u, \\ S_{1y} = \mu(|u|^2)_x, \ S_{2x} = (|u|^2)_y. \end{cases} \tag{22}$$

Поклавши $c_1 = c_2 = 1$, $\mu = 1$ отримаємо звідси такий диференціальний наслідок

$$\begin{cases} \alpha_2 u_{t_2} = u_{xx} + u_{yy} - 2Su, \\ S_{xy} = (|u|^2)_{xx} + (|u|^2)_{yy}, \end{cases} \tag{23}$$

де $S = S_1 + S_2$.

Тепер в системі (22) покладемо $c_1 = -c_2 = 1$, $\mu = 1$. Зробивши заміну $\tilde{x} = x - y$, $\tilde{y} = x + y$ та поклавши $\tilde{S}(\tilde{x}, \tilde{y}, t_2) := S_1(x, y, t_2) - S_2(x, y, t_2)$, $\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}, t_2) := u(x, y, t_2)$; $\tilde{x} := x$, $\tilde{y} := y$, отримаємо систему

$$\begin{cases} \alpha_2\tilde{u}_{t_2} = 4\tilde{u}_{xy} - 2\tilde{u}\tilde{S}, \\ \tilde{S}_{yy} - \tilde{S}_{xx} = 4|\tilde{u}|_{xy}^2. \end{cases} \tag{24}$$

Системи (23), (24) є різними реалізаціями першої моделі Деві-Стюартсона (DS-I).

Розглянемо тепер формальні інтегродиференціальні вирази $L_1 = \partial_{\bar{z}} - \mathbf{q}\mathcal{M}_0 D_z^{-1}\mathbf{r}^\top$, $M_2 = \alpha_2\partial_{t_2} - c_1 D_{zz}^2 - c_2\partial_{\bar{z}\bar{z}}^2 + 2c_1 S_1 + 2c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D_z^{-1}\mathbf{r}_{\bar{z}}^\top + 2c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D_z^{-1}\mathbf{r}^\top\partial_{\bar{z}}$, де $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}(z, \bar{z}, t_2)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(z, \bar{z}, t_2)$ та $S_1 = S_1(z, \bar{z}, t_2)$ – матричні функції розмірностей $N \times M$, та $N \times N$ відповідно; $\mathcal{M}_0$ – стала матриця розмірності $M \times M$.

Операторне рівняння $[L_1, M_2] = 0$ еквівалентне системі

$$\begin{cases} \alpha_2\mathbf{q}_{t_2} = c_1\mathbf{q}_{zz} + c_2\mathbf{q}_{\bar{z}\bar{z}} - 2c_1 S_1\mathbf{q} - 2c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 S_2, \\ -\alpha_2\mathbf{r}_{t_2}^\top = c_1\mathbf{r}_{zz}^\top + c_2\mathbf{r}_{\bar{z}\bar{z}}^\top - 2c_1\mathbf{r}^\top S_1 - 2c_2 S_2\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top, \\ S_{1\bar{z}} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_z, \ S_{2z} = (\mathbf{r}^\top\mathbf{q})_{\bar{z}}. \end{cases} \tag{25}$$

В змінних t_2, x, y при $c_1 = c_2 = 1$ система (25) виглядатиме так:

$$\begin{cases} 2\alpha_2\mathbf{q}_{t_2} = \mathbf{q}_{xx} - \mathbf{q}_{yy} - 4S_1\mathbf{q} - 4\mathbf{q}\mathcal{M}_0 S_2, \\ -2\alpha_2\mathbf{r}_{t_2}^\top = \mathbf{r}_{xx}^\top - \mathbf{r}_{yy}^\top - 4\mathbf{r}^\top S_1 - 4S_2\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top, \\ S_{1x} + iS_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_x - i(\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_y, \ S_{2x} - iS_{2y} = (\mathbf{r}^\top\mathbf{q})_x + i(\mathbf{r}^\top\mathbf{q})_y. \end{cases} \tag{26}$$

При $N = M$ ($\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ – квадратні матриці), $\alpha_2 \in i\mathbb{R}$ система (26) допускає редукцію $\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top = \bar{\mathbf{q}}$, $S_1 = \bar{S}_2$ і набуває вигляду

$$\begin{cases} 2\alpha_2\mathbf{q}_{t_2} = \mathbf{q}_{xx} - \mathbf{q}_{yy} - 4S_1\mathbf{q} - 4\mathbf{q}\bar{S}_1, \\ S_{1x} + iS_{1y} = (\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}})_x - i(\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}})_y. \end{cases} \tag{27}$$

У скалярному випадку ($N = M = 1$), $u := \mathbf{q}$ система (27) зводиться до вигляду

$$\begin{cases} 2\alpha_2 u_{t_2} = u_{xx} - u_{yy} - 8\hat{S}u, \\ \hat{S}_{xx} + \hat{S}_{yy} = |u|_{xx}^2 - |u|_{yy}^2, \end{cases} \tag{28}$$

де $\hat{S} = \mathrm{Re}(S_1)$.

Якщо ж покласти у системі (25) $c_1 = -c_2 = i$, то отримаємо

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha_2 \mathbf{q}_{t_2} = \mathbf{q}_{xy} - 2iS_1\mathbf{q} + 2i\mathbf{q}\mathcal{M}_0 S_2, \\ -\alpha_2 \mathbf{r}^\top_{t_2} = \mathbf{r}^\top_{xy} - 2i\mathbf{r}^\top S_1 + 2iS_2\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top, \\ S_{1x} + iS_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_x - i(\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_y,\ S_{2x} - iS_{2y} = (\mathbf{r}^\top\mathbf{q})_x + i(\mathbf{r}^\top\mathbf{q})_y. \end{array}\right. \tag{29}$$

При $N = M$ ($\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ – квадратні матриці), $\alpha_2 \in i\mathbb{R}$ для системи (29) допустима редукція $\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top = \bar{\mathbf{q}}$, $S_1 = \bar{S}_2$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_2 \mathbf{q}_{t_2} = \mathbf{q}_{xy} - 2iS_1\mathbf{q} + 2i\mathbf{q}\bar{S}_1, \\ S_{1x} + iS_{1y} = (\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}})_x - i(\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}})_y. \end{array}\right. \tag{30}$$

У скалярному випадку ($N = M = 1$) диференціальним наслідком системи (30) є рівняння

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_2 \tilde{u}_{t_2} = \tilde{u}_{xy} + 4\tilde{S}\tilde{u}, \\ \tilde{S}_{xx} + \tilde{S}_{yy} = -4|\tilde{u}|^2_{xy}, \end{array}\right. \tag{31}$$

де $\tilde{S} = \mathrm{Im}(S_1)$, $\tilde{u} := \mathbf{q}$.

Системи (28) та (31) є різними реалізаціями моделі Деві-Стюартсона (DS-II).

4 Інтегро-диференціальні зображення Лакса для матричного просторово-двовимірного узагальнення модифікованого рівняння Кортевега-де Вріза

Розглянемо таке узагальнення пари виразів L_1, M_3 (14)

$$L_1 = \partial_y - \mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{r}^\top, \tag{32}$$

$$M_3 = \alpha_3\partial_{t_3} + c_1 D^3 - c_2\partial_y^3 - 3c_1 v_1 D - 3c_1 v_3 + 3c_2\mathbf{q}_y\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{r}_y^\top$$
$$-3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0\partial_y D^{-1}\mathbf{r}^\top\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{r}^\top + 3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_2\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{r}^\top + 3c_2\partial_y\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{r}^\top\partial_y, \tag{33}$$

де $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x, y, t_3)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, t_3)$ та $v_1 = v_1(x, y, t_3)$, $v_3 = v_3(x, y, t_3)$ — матричні функції розмірності $N \times M$ та $N \times N$ відповідно. Операторне рівняння $[L_1, M_3] = 0$ еквівалентне системі

$$\alpha_3\mathbf{q}_{t_3} + c_1\mathbf{q}_{xxx} - c_2\mathbf{q}_{yyy} - 3c_1 v_1\mathbf{q}_x + 3c_2\mathbf{q}_y\mathcal{M}_0 v_2 + 3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_{2y} - 3c_1 v_3\mathbf{q} - 3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_4$$
$$-3c_2\mathbf{q}D^{-1}\left\{\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_2 - \mathcal{M}_0 v_2\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\mathbf{q}\right\} = 0,$$
$$\alpha_3\mathbf{r}^\top_{t_3} + c_1\mathbf{r}^\top_{xxx} - c_2\mathbf{r}^\top_{yyy} - 3c_1\mathbf{r}^\top_x v_1 - 3c_1\mathbf{r}^\top v_{1x} + 3c_2 v_2\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top_y + 3c_1\mathbf{r}^\top v_3 + 3c_2 v_4\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top$$
$$-3c_2 D^{-1}\left\{v_2\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\mathbf{q} - \mathbf{r}^\top\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_2\right\}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top = 0,$$
$$v_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_x,\ v_{2x} = (\mathbf{r}^\top\mathbf{q})_y,\ v_{3y} = (\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_x + [\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top, v_1],\ v_{4x} = (\mathbf{r}_y^\top\mathbf{q})_y. \tag{34}$$

Розглянемо деякі редукції системи (34):

1). При $c_2 = 0$ система (34) набуде вигляду

$$\alpha_3\mathbf{q}_{t_3} + c_1\mathbf{q}_{xxx} - 3c_1 v_1\mathbf{q}_x - 3c_1 v_3\mathbf{q} = 0,$$
$$\alpha_3\mathbf{r}^\top_{t_3} + c_1\mathbf{r}^\top_{xxx} - 3c_1\mathbf{r}^\top_x v_1 - 3c_1\mathbf{r}^\top v_{1x} + 3c_1\mathbf{r}^\top v_3 = 0,$$
$$v_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_x,\ v_{3y} = (\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_x + [\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top, v_1]. \tag{35}$$

2). При $c_1 = 0$ система (34) набуде вигляду

$$\alpha_3\mathbf{q}_{t_3} - c_2\mathbf{q}_{yyy} + 3c_2\mathbf{q}_y\mathcal{M}_0 v_2 + 3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_{2y} - 3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_4$$
$$-3c_2\mathbf{q}D^{-1}\left\{\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_2 - \mathcal{M}_0 v_2\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\mathbf{q}\right\} = 0,$$
$$\alpha_3\mathbf{r}^\top_{t_3} - c_2\mathbf{r}^\top_{yyy} + 3c_2 v_2\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top_y + 3c_2 v_4\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top - 3c_2 D^{-1}\left\{v_2\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\mathbf{q} - \mathbf{r}^\top\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_2\right\}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top = 0,$$
$$v_{2x} = (\mathbf{r}^\top\mathbf{q})_y,\ v_{4x} = (\mathbf{r}_y^\top\mathbf{q})_y$$

3). При допустимій редукції $\alpha_3, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{r}^\top = \mathbf{q}^*$, $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0^*$, оператори L_1, M_3 будуть косоермітовими, а система (34) набуде вигляду

$$\alpha_3\mathbf{q}_{t_3} + c_1\mathbf{q}_{xxx} - c_2\mathbf{q}_{yyy} - 3c_1 v_1\mathbf{q}_x + 3c_2\mathbf{q}_y\mathcal{M}_0 v_2 + 3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_{2y} - 3c_1 v_3\mathbf{q} - 3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_4$$
$$-3c_2\mathbf{q}D^{-1}\left\{\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_2 - \mathcal{M}_0 v_2\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*\mathbf{q}\right\} = 0,$$
$$v_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x,\ v_{2x} = (\mathbf{q}^*\mathbf{q})_y,\ v_{3y} = (\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x + [\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*, v_1],\ v_{4x} = (\mathbf{q}_y^*\mathbf{q})_y. \tag{36}$$

В скалярному випадку ($N = M = 1$, $\mathbb{R} \ni \mu := \mathcal{M}_0$, $q(x, y, t_3) := \mathbf{q}(x, y, t_3)$) система (36) матиме вигляд

$$\alpha_3 q_{t_3} + c_1 q_{xxx} - c_2 q_{yyy} - 3c_1\mu q_x\int |q|^2_x dy$$
$$+3c_2\mu q_y\int |q|^2_y dx + 3c_2\mu q\int (\bar{q}q_y)_y dx - 3c_1\mu q\int (q_x q)_x dy = 0.$$

3а). Якщо покласти $c_2 = 0$, то система (36) набуде вигляду

$$\alpha_3\mathbf{q}_{t_3} + c_1\mathbf{q}_{xxx} - 3c_1 v_1\mathbf{q}_x - 3c_1 v_3\mathbf{q} = 0,$$
$$v_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x,\ v_{3y} = (\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x + [\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*, v_1].$$

3б). У випадку $c_1 = 0$ система (36) буде такою

$$\alpha_3\mathbf{q}_{t_3} - c_2\mathbf{q}_{yyy} + 3c_2\mathbf{q}_y\mathcal{M}_0 v_2 + 3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_{2y} - 3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_4$$
$$-3c_2\mathbf{q}D^{-1}\left\{\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_2 - \mathcal{M}_0 v_2\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*\mathbf{q}\right\} = 0,$$
$$v_{2x} = (\mathbf{q}^*\mathbf{q})_y,\ v_{4x} = (\mathbf{q}_y^*\mathbf{q})_y.$$

3в). У дійсному випадку ($\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}$) рівняння (36) набуде вигляду

$$\alpha_3\mathbf{q}_{t_3} + c_1\mathbf{q}_{xxx} - c_2\mathbf{q}_{yyy} - 3c_1 v_1\mathbf{q}_x + 3c_2\mathbf{q}_y\mathcal{M}_0 v_2 + 3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_{2y} - 3c_1 v_3\mathbf{q} - 3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_4$$
$$-3c_2\mathbf{q}D^{-1}\left\{\mathcal{M}_0\mathbf{q}^\top\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_2 - \mathcal{M}_0 v_2\mathcal{M}_0\mathbf{q}^\top\mathbf{q}\right\} = 0,$$
$$v_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^\top)_x,\ v_{2x} = (\mathbf{q}^\top\mathbf{q})_y,\ v_{3y} = (\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{q}^\top)_x + [\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^\top, v_1],\ v_{4x} = (\mathbf{q}_y^\top\mathbf{q})_y. \tag{37}$$

У скалярному випадку ($N = M = 1$) рівняння (37) виглядатиме так ($\mathcal{M}_0 =: \mu$, $q = q(x, y, t_3) := \mathbf{q}(x, y, t_3)$)

$$\alpha_3 q_{t_3} + c_1 q_{xxx} - c_2 q_{yyy} - 3c_1\mu(q_x + \frac{1}{2}q\partial_x)\int q_x^2 dy + 3c_2\mu(q_y + \frac{1}{2}q\partial_y)\int q_y^2 dx = 0. \tag{38}$$

При $y = x$, $c_1 - c_2 = 1$ рівняння (38) набуде такого вигляду

$$\alpha_3 q_{t_3} + q_{xxx} - 6\mu q^2 q_x = 0. \tag{39}$$

Рівняння (39) називається модифікованим рівнянням Кортевега-де Вріза (mKdV), а рівняння (36) та (37) є, відповідно, його комплексним та дійсним матричними просторово-двовимірними узагальненнями.

4). Накладемо редукцію $\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top = \nu$, де ν — стала матриця. Після заміни $u := \mathbf{q}\nu$ система (34) набуде вигляду

$$\alpha_3 u_{t_3} + c_1 u_{xxx} - c_2 u_{yyy} - 3c_1 D\left\{\left(\int u_x dy\right) u\right\} + 3c_2\partial_y\left\{u\left(\int u_y dx\right)\right\}$$
$$-3c_1\left(\int [u, v_1]dy\right) u - 3c_2 u D^{-1}\{[u, v_2]\} = 0,$$
$$\nu\left(c_1\int [u, v_1]dy - c_2 D^{-1}\{[v_2, u]\}\right) = 0,$$
$$v_{1y} = u_x,\ v_{2x} = u_y. \tag{40}$$

4a). Якщо $c_2 = 0$, то система (40) виглядатиме так

$$\alpha_3 u_{t_3} + c_1 u_{xxx} - 3c_1 D\left\{\left(\int u_x dy\right) u\right\} - 3c_1\left(\int [u, v_1]dy\right) u = 0,$$
$$\nu\int [u, v_1]dy = 0,\ v_{1y} = u_x.$$

4б). У випадку $c_1 = 0$ система (40) набуде такого вигляду

$$\alpha_3 u_{t_3} - c_2 u_{yyy} + 3c_2\partial_y\left\{u\left(\int u_y dx\right)\right\} + 3c_2 u D^{-1}\{[u, v_2]\} = 0,$$
$$\nu D^{-1}\{[v_2, u]\} = 0,\ v_{2x} = u_y.$$

В скалярному випадку ($N = 1, M = 1$) система (40) виглядатиме так

$$\alpha_3 u_{t_3} + c_1 u_{xxx} - c_2 u_{yyy} - 3c_1 D\left\{\left(\int u_x dy\right) u\right\} + 3c_2\partial_y\left\{u\left(\int u_y dx\right)\right\} = 0. \tag{41}$$

Рівняння (41) є рівнянням Нижника [28], а система (40) узагальнює його на матричний випадок.

Тепер розглянемо такі формальні інтегро-диференціальні вирази

$$L_1 = \partial_{\bar z} - \mathbf{q}\mathcal{M}_0 D_z^{-1}\mathbf{r}^\top,$$

$$M_3 = \alpha_3\partial_{t_3} + c_1 D_z^3 - c_2\partial_{\bar z}^3 - 3c_1 v_1 D_z - 3c_1 v_3 + 3c_2\mathbf{q}_{\bar z}\mathcal{M}_0 D_z^{-1}\mathbf{r}_{\bar z}^\top + 3c_2\mathbf{q}_{\bar z}\mathcal{M}_0 D_z^{-1}\mathbf{r}^\top\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D_z^{-1}\mathbf{r}^\top$$
$$+3c_2\mathbf{q}v_2\mathcal{M}_0 D_z^{-1}\mathbf{r}^\top + 3c_2\partial_z\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D_z^{-1}\mathbf{r}^\top\partial_{\bar z} - 3c_2\partial_z\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D_z^{-1}\mathbf{r}^\top\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D_z^{-1}\mathbf{r}^\top.$$

де $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}(z, \bar z, t_3)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(z, \bar z, t_3)$ та $S_1 = S_1(z, \bar z, t_3)$ – матричні функції розмірностей $N \times M$ та $N \times N$ відповідно; $\mathcal{M}_0$ – стала матриця розмірності $M \times M$.

Операторне рівняння $[L_1, M_3] = 0$ еквівалентне системі

$$\alpha_3\mathbf{q}_{t_3} + c_1\mathbf{q}_{zzz} - c_2\mathbf{q}_{\bar z\bar z\bar z} - 3c_1 v_1\mathbf{q}_z + 3c_2\mathbf{q}_{\bar z}\mathcal{M}_0 v_2 + 3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_{2\bar z} - 3c_1 v_3\mathbf{q} - 3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_4$$
$$-3c_2\mathbf{q}D_z^{-1}\left\{\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_2 - \mathcal{M}_0 v_2\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\mathbf{q}\right\} = 0,$$
$$\alpha_3\mathbf{r}_{t_3}^\top + c_1\mathbf{r}_{zzz}^\top - c_2\mathbf{r}_{\bar z\bar z\bar z}^\top - 3c_1\mathbf{r}_z^\top v_1 - 3c_1\mathbf{r}^\top v_{1z} + 3c_2 v_2\mathcal{M}_0\mathbf{r}_{\bar z}^\top + 3c_1\mathbf{r}^\top v_3 + 3c_2 v_4\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top$$
$$-3c_2 D_z^{-1}\left\{v_2\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\mathbf{q} - \mathbf{r}^\top\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_2\right\}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top = 0,$$
$$v_{1\bar z} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_z,\ v_{2z} = (\mathbf{r}^\top\mathbf{q})_{\bar z},\ v_{3\bar z} = (\mathbf{q}_z\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_z + [\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top, v_1],\ v_{4z} = (\mathbf{r}_{\bar z}^\top\mathbf{q})_{\bar z}.$$

Покладаючи $c_1 = -c_2 = 1$ та, враховуючи, що $z = x + iy$, отримаємо систему

$$\alpha_3\mathbf{q}_{t_3} + \frac{1}{4}(\mathbf{q}_{xxx} - 3\mathbf{q}_{xyy}) - \frac{3}{2}v_1(\mathbf{q}_x - i\mathbf{q}_y) - \frac{3}{2}(\mathbf{q}_x + i\mathbf{q}_y)\mathcal{M}_0 v_2 - \frac{3}{2}\mathbf{q}\mathcal{M}_0(v_{2x} + iv_{2y}) - 3v_3\mathbf{q}$$
$$-3\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_4 - 3\mathbf{q}D_z^{-1}\left\{\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_2 - \mathcal{M}_0 v_2\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\mathbf{q}\right\} = 0,$$
$$\alpha_3\mathbf{r}_{t_3}^\top + \frac{1}{4}(\mathbf{r}_{xxx}^\top - 3\mathbf{r}_{xyy}^\top) - \frac{3}{2}(\mathbf{r}_x^\top - i\mathbf{r}_y^\top)v_1 - \frac{3}{2}\mathbf{r}^\top(v_{1x} - iv_{1y}) - \frac{3}{2}v_2\mathcal{M}_0(\mathbf{r}_x^\top + i\mathbf{r}_y^\top) + 3\mathbf{r}^\top v_3 - 3v_4\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top$$
$$-3D_z^{-1}\left\{v_2\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\mathbf{q} - \mathbf{r}^\top\mathbf{q}\mathcal{M}_0 v_2\right\}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top = 0,$$
$$v_{1x} + iv_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_x - i(\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_y,\ v_{2x} - iv_{2y} = (\mathbf{r}^\top\mathbf{q})_x + i(\mathbf{r}^\top\mathbf{q})_y,$$
$$v_{3x} + iv_{3y} = \frac{1}{2}((\mathbf{q}_x - i\mathbf{q}_y)\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_x - \frac{i}{2}((\mathbf{q}_x - i\mathbf{q}_y)\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_y + 2[\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top, v_1],$$
$$v_{4x} - iv_{4y} = \frac{1}{2}((\mathbf{r}_x^\top + i\mathbf{r}_y^\top)\mathbf{q})_x + \frac{i}{2}((\mathbf{r}_x^\top + i\mathbf{r}_y^\top)\mathbf{q})_y. \tag{42}$$

Розглянемо дві редукції останньої системи:

1). При $\alpha_3 \in \mathbb{R}$, $N = M$ для системи (42) допустима редукція $\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top = \bar{\mathbf{q}}$, а система (42) при цьому набуде такого вигляду

$$\alpha_3\mathbf{q}_{t_3} + \frac{1}{4}(\mathbf{q}_{xxx} - 3\mathbf{q}_{xyy}) - \frac{3}{2}v_1(\mathbf{q}_x - i\mathbf{q}_y) - \frac{3}{2}(\mathbf{q}_x + i\mathbf{q}_y)\bar v_1 - \frac{3}{2}\mathbf{q}(\bar v_{1x} + i\bar v_{1y}) - 3v_3\mathbf{q} + 3\mathbf{q}\bar v_3 = 0,$$
$$v_{1x} + iv_{1y} = (\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}})_x - i(\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}})_y,$$
$$v_{3x} + iv_{3y} = \frac{1}{2}((\mathbf{q}_x - i\mathbf{q}_y)\bar{\mathbf{q}})_x - \frac{i}{2}((\mathbf{q}_x - i\mathbf{q}_y)\bar{\mathbf{q}})_y + 2[\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}, v_1].$$

2). Накладемо редукцію $\mathbf{q}\mathcal{M}_0 = \nu$, де ν – стала матриця. Після заміни $u := \nu\mathbf{r}^\top$ система (42) набуде вигляду

$$\left\{\begin{array}{c}
\left(D_{\bar z}^{-1}\{[u, v_1]\} + D_z^{-1}\{[u, v_2]\}\right)\nu = 0,\\
\alpha_3 u_{t_3} + \frac{1}{4}(u_{xxx} - 3u_{xyy}) - \frac{3}{2}(u_x - iu_y)v_1\\
-\frac{3}{2}u(v_{1x} - iv_{1y}) - \frac{3}{2}v_2(u_x + iu_y) + 3uD_{\bar z}^{-1}\{[u, v_1]\}\\
-\frac{3}{4}D_z^{-1}\{u_{xx} - u_{yy} + 2iu_{xy}\}u - 3D_z^{-1}\{[v_2, u]\}u = 0,\\
v_{1x} + iv_{1y} = u_x - iu_y,\\
v_{2x} - iv_{2y} = u_x + iu_y.
\end{array}\right.$$

В скалярному випадку система (4) виглядатиме так

$$\left\{\begin{array}{c}
\alpha_3 u_{t_3} + \frac{1}{4}(u_{xxx} - 3u_{xyy}) - \frac{3}{4}(u_x - iu_y)D_{\bar z}^{-1}\{u_x - iu_y\}\\
-\frac{3}{4}(u_x + iu_y)D_z^{-1}\{u_x + iu_y\} - \frac{3}{2}uD_z^{-1}\{u_{xx} - u_{yy}\} = 0,\\
v_{1x} + iv_{1y} = u_x - iu_y,\ v_{2x} - iv_{2y} = u_x + iu_y.
\end{array}\right. \tag{43}$$

Рівняння (43) є рівняннями Весєлова-Новікова [1], а система (4) є їх матричним узагальненням.

5 Інтегро-диференціальні зображення Лакса для просторово-двовимірного матричного узагальнення моделі Чена-Лі-Лю

Розглянемо формальні інтегро-диференціальні вирази:

$$L_1 = \partial_y - \mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{r}^\top D, \tag{44}$$

$$M_2 = \alpha_2\partial_{t_2} - c_1 D^2 - c_2\partial_y^2 + 2c_1 S_1 D + 2c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\partial_y \mathbf{r}^\top D. \tag{45}$$

де $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x,y,t_2)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x,y,t_2)$ та $S_1 = S_1(x,y,t_2)$ – матричні функції розмірностей $N\times M$ та $N\times N$ відповідно; $\mathcal{M}_0$ – стала матриця розмірності $M\times M$.

Умова $[L_1, M_2] = 0$ еквівалентна системі рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_2\mathbf{q}_{t_2} - c_1\mathbf{q}_{xx} - c_2\mathbf{q}_{yy} + 2c_1 S_1\mathbf{q}_x - 2c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 S_2 + 2c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0(\mathbf{r}^\top\mathbf{q})_y = 0, \\ \left(\alpha_2\mathbf{r}_{t_2}^\top + c_1\mathbf{r}_{xx}^\top + c_2\mathbf{r}_{yy}^\top + 2c_1\mathbf{r}_x^\top S_1 + 2c_2 S_2\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\right)_x = 0. \\ S_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_x + [\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top, S_1],\ S_{2x} = (\mathbf{r}_x^\top\mathbf{q})_y. \end{cases} \tag{46}$$

Система (46) є матричним просторово-двовимірним узагальненням системи Чена-Лі-Лю [19].

Розглянемо можливі редукції системи (46):

1). $c_2 = 0$:

$$\begin{cases} \alpha_2\mathbf{q}_{t_2} - c_1\mathbf{q}_{xx} + 2c_1 S_1\mathbf{q}_x = 0, \\ \left(\alpha_2\mathbf{r}_{t_2}^\top + c_1\mathbf{r}_{xx}^\top + 2c_1\mathbf{r}_x^\top S_1\right)_x = 0, \\ S_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_x + [\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top, S_1]. \end{cases}$$

2). $c_1 = 0$:

$$\begin{cases} \alpha_2\mathbf{q}_{t_2} - c_2\mathbf{q}_{yy} - 2c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 S_2 + 2c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0(\mathbf{r}^\top\mathbf{q})_y = 0, \\ \left(\alpha_2\mathbf{r}_{t_2}^\top + c_2\mathbf{r}_{yy}^\top + 2c_2 S_2\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\right)_x = 0, \\ S_{2x} = (\mathbf{r}_x^\top\mathbf{q})_y. \end{cases}$$

3). При додаткових умовах $\alpha_2 \in i\mathbb{R}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\mathcal{M}_0 = -\mathcal{M}_0^*$, $\mathbf{r}^\top = \mathbf{q}^*$, $S_1 = S_1^*$ формальні вирази L_1 (44) та M_2 (45) будуть D-косоермітовим ($L_1^* = -DL_1D^{-1}$) та D-ермітовим ($M_2^* = DM_2D^{-1}$) відповідно і матимуть вигляд

$$L_1 = \partial_y - \mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{q}^* D,$$

$$M_2 = \alpha_2\partial_{t_2} - c_1 D^2 - c_2\partial_y^2 + 2c_1 S_1 D + 2c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\partial_y\mathbf{q}^* D,$$

а система (46) виглядатиме так:

$$\begin{cases} \alpha_2\mathbf{q}_{t_2} - c_1\mathbf{q}_{xx} - c_2\mathbf{q}_{yy} + 2c_1 S_1\mathbf{q}_x - 2c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 S_2 + 2c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0(\mathbf{q}^*\mathbf{q})_y = 0, \\ S_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x + [\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*, S_1],\ S_{2x} = (\mathbf{q}_x^*\mathbf{q})_y. \end{cases} \tag{47}$$

В скалярному випадку ($N = M = 1$) при $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $y = x$, $\mu := \mathcal{M}_0$, $q = q(x,y,t_2) := \mathbf{q}(x,y,t_2)$ ми отримаємо з системи (47) модель Чена-Лі-Лю [19]

$$\alpha_2 q_{t_2} - q_{xx} + 2\mu|q|^2 q_x = 0.$$

4). При редукції $\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top = \nu$, де ν – стала матриця, формальні вирази L_1 (44) та M_1 (45) будуть диференціальними, а система (46) після заміни $u := \mathbf{q}\nu$ матиме вигляд

$$\begin{cases} \alpha_2 u_{t_2} - c_1 u_{xx} - c_2 u_{yy} + 2c_1 S_1 u_x + 2c_2 u u_y = 0, \\ S_{1y} = u_x + [u, S_1]. \end{cases} \tag{48}$$

Система (48) є матричним просторово-двовимірним узагальненням рівняння Бюргерса. Ми розглянемо детальніше це рівняння та побудову його розв'язків у наступному розділі.

Для побудови вищої симетрії просторово-двовимірного узагальнення рівняння Чена-Лі-Лю розглянемо такі формальні інтегро-диференціальні вирази:

$$L_1 = \partial_y - \mathbf{q}D^{-1}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top D, \tag{49}$$

$$\begin{aligned} M_3 = {} & \alpha_3\partial_{t_3} + c_1 D^3 - c_2\partial_y^3 - 3c_1 v_1 D^2 - 3c_1 v_3 D + 3c_2\mathbf{q}_y\mathcal{M}_0 D^{-1}\partial_y\mathbf{r}^\top D \\ & +3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\partial_y\mathbf{r}^\top\partial_y D - 3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0\partial_y D^{-1}\mathbf{r}^\top D\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\mathbf{r}^\top D \\ & +3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\{\mathbf{r}^\top\mathbf{q}_x\}_y D^{-1}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top D. \end{aligned} \tag{50}$$

де $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x,y,t_3)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x,y,t_3)$ та $v_1 = v_1(x,y,t_3)$, $v_3 = v_3(x,y,t_3)$ – матричні функції розмірності $N\times M$ та $N\times N$ відповідно, $\mathcal{M}_0$ – стала $(M\times M)$-матриця. Умова $[L_1, M_3] = 0$ еквівалентна системі рівнянь

$$\begin{aligned} & \alpha_3\mathbf{q}_{t_3} + c_1\mathbf{q}_{xxx} - c_2\mathbf{q}_{yyy} - 3c_1 v_1\mathbf{q}_{xx} - 3c_1 v_3\mathbf{q}_x + 3c_2\mathbf{q}_y\mathcal{M}_0 D^{-1}\{\mathbf{r}^\top\mathbf{q}_x\}_y \\ & +3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\{\mathbf{r}^\top\mathbf{q}_{xy}\}_y - 3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\left\{\mathbf{r}^\top\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0 D^{-1}\{\mathbf{r}^\top\mathbf{q}_x\}_y - D^{-1}\{\mathbf{r}^\top\mathbf{q}_x\}_y\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\mathbf{q}_x\right\} \\ & -3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\{\mathbf{r}^\top\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\mathbf{q}_x\}_y = 0, \\ & (\ \alpha_3\mathbf{r}_{t_3}^\top + c_1\mathbf{r}_{xxx}^\top - c_2\mathbf{r}_{yyy}^\top + 3c_1(\mathbf{r}_x^\top v_1)_x - 3c_1\mathbf{r}_x^\top v_3 - 3c_2 D^{-1}\{\mathbf{r}_x^\top\mathbf{q}\}_y\mathcal{M}_0\mathbf{r}_y^\top \\ & -3c_2 D^{-1}\{\mathbf{r}_{xy}^\top\mathbf{q}\}_y\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top - 3c_2 D^{-1}\left\{D^{-1}\{\mathbf{r}_x^\top\mathbf{q}\}_y\mathcal{M}_0\mathbf{r}_x^\top\mathbf{q} - \mathbf{r}_x^\top\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\{\mathbf{r}_x^\top\mathbf{q}\}_y\right\}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top \\ & -3c_2 D^{-1}\{\mathbf{r}_x^\top\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\mathbf{q}\}_y\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top\ )_x = 0, \\ & v_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_x - [v_1, \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top], \\ & v_{3y} = (\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_x - \left\{2v_1\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top + v_1\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}_x^\top + \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}_x^\top v_1\right\} - [v_3, \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top]. \end{aligned} \tag{51}$$

1). При додаткових умовах $\alpha_3 \in \mathbb{R}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\mathcal{M}_0 = -\mathcal{M}_0^*$, $\mathbf{r}^\top = \mathbf{q}^*$, $v_1 = v_1^*$, $v_3 + v_3^* = v_{1x}$, формальні вирази L_1 (49) та M_3 (50) будуть D-косоермітовими ($L_1^* = -DL_1D^{-1}$, $M_3^* = -DM_3D^{-1}$), а система (51) матиме вигляд

$$\begin{aligned} & \alpha_3\mathbf{q}_{t_3} + c_1\mathbf{q}_{xxx} - c_2\mathbf{q}_{yyy} - 3c_1 v_1\mathbf{q}_{xx} - 3c_1 v_3\mathbf{q}_x + 3c_2\mathbf{q}_y\mathcal{M}_0 D^{-1}\{\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x\}_y \\ & +3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\{\mathbf{q}^*\mathbf{q}_{xy}\}_y - 3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\left\{\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0 D^{-1}\{\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x\}_y - D^{-1}\{\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x\}_y\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x\right\} \\ & -3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0 D^{-1}\{\mathbf{q}^*\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x\}_y = 0, \\ & v_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x - [v_1, \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*], \\ & v_{3y} = (\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x - \{2v_1\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{q}^* + v_1\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}_x^* + \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}_x^* v_1\} - [v_3, \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*]. \end{aligned} \tag{52}$$

У векторному випадку ($\mathbf{q}$ – вектор, тобто $M = 1$), система (52) матиме такий вигляд

$$\alpha_3\mathbf{q}_{t_3} + c_1\mathbf{q}_{xxx} - c_2\mathbf{q}_{yyy} - 3c_1v_1\mathbf{q}_{xx} - 3c_1v_3\mathbf{q}_x + 3c_2\mathbf{q}_y\mathcal{M}_0D^{-1}\{\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x\}_y$$

$$+3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0D^{-1}\{\mathbf{q}^*\mathbf{q}_{xy}\}_y - 3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0D^{-1}\left\{\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0D^{-1}\{\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x\}_y - D^{-1}\{\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x\}_y\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x\right\}$$

$$-3c_2\mathbf{q}\mathcal{M}_0D^{-1}\{\mathbf{q}^*\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x\}_y = 0,$$

$$v_{1y} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x,$$

$$v_{3y} = (\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x - 2v_1(\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{q}^* + \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*_x). \qquad (53)$$

В скалярному випадку ($N = 1$, $M = 1$, $\mathcal{M}_0 =: \mu$, $q = q(x, y, t_3) := \mathbf{q}(x, y, t_3)$) система (53) виглядатиме так:

$$\alpha_3q_{t_3} + c_1q_{xxx} - c_2q_{yyy} - 3c_1v_1q_{xx} - 3c_1v_3q_x + 3\mu c_2q_yD^{-1}\{\bar{q}q_x\}_y+$$

$$+3c_2\mu qD^{-1}\{\bar{q}q_{xy}\}_y - 3c_2\mu^2qD^{-1}\{|q|^2\bar{q}q_x\}_y = 0,$$

$$v_{1y} = \mu(|q|^2)_x,$$

$$v_{3y} = \mu(q_x\bar{q})_x - 2\mu v_1(|q|^2)_x. \qquad (54)$$

При $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, y з системи (54) отримаємо вищу симетрію рівняння Чена-Лі-Лю:

$$\alpha_3q_{t_3} + q_{xxx} - 3\mu|q|^2q_{xx} - 3\mu\bar{q}q_x^2 + 3\mu^2|q|^4q_x = 0.$$

2). При редукції $\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top = \nu$ формальний вираз L_1 (49) буде диференціальним, а система (51) після заміни $u := \mathbf{q}\nu$ матиме вигляд

$$\alpha_3u_{t_3} + c_1u_{xxx} - c_2u_{yyy} - 3c_1v_1u_{xx} - 3c_1v_3u_x + 3c_2u_y^2 + 3c_2uu_{yy} - 3c_2u^2u_y = 0,$$

$$v_{1y} = u_x - [v_1, u],$$

$$v_{3y} = u_{xx} - 2v_1u_x - [v_3, u]. \qquad (55)$$

Рівняння (55) є вищою симетрією матричного просторово-двовимірного рівняння Бюргерса, яка розглядатиметься детальніше у наступному розділі.

6 Узагальнення рівняння Бюргерса та їх розв'язки

У цьому розділі ми розглянемо два матричні різновиди просторово-двовимірних узагальнень рівняння Бюргерса. А саме, систему (48) та рівняння такого вигляду:

$$\begin{cases} \alpha_2u_{t_2} - c_1u_{xx} - c_2u_{yy} + 2c_1u_xS_1 + 2c_2u_yu = 0, \\ S_{1y} = u_x + [u, S_1]. \end{cases} \qquad (56)$$

Твердження 6.1. *Нехай $T := T(x, y, t_2)$ – $(N\times N)$-матрична функція, яка задовольняє рівняння*

$$\alpha_2T_{t_2} = c_1T_{xx} + c_2T_{yy}. \qquad (57)$$

Тоді:

1. $N \times N$ матричні функції $u := -T^{-1}T_y$ та $S_1 = -T^{-1}T_x$ задовольняють матричне просторово-двовимірне рівняння Бюргерса (48).

2. $N \times N$ матричні функції $u := -T_yT^{-1}$ та $S_1 = -T_xT^{-1}$ задовольняють матричне просторово-двовимірне рівняння Бюргерса (56).

Розглянемо тепер такі узагальнення рівняння Бюргерса:

$$\begin{cases} \alpha_2u_{t_2} - c_1u_{xx} - c_2u_{yy} + 2c_1S_1u_x + 2c_2uu_y = 0, \\ \alpha_2S_{1t_2} - c_1S_{1xx} - c_2S_{1yy} + 2c_1S_1S_{1x} + 2c_2uS_{1y} = 0. \end{cases} \qquad (58)$$

$$\begin{cases} \alpha_2u_{t_2} - c_1u_{xx} - c_2u_{yy} + 2c_1u_xS_1 + 2c_2u_yu = 0, \\ \alpha_2S_{1t_2} - c_1S_{1xx} - c_2S_{1yy} + 2c_1S_{1x}S_1 + 2c_2S_{1y}u = 0. \end{cases} \qquad (59)$$

У випадку $N > 1$ розв'язки систем (58) та (59) будуть також розв'язками систем (48) та (56) відповідно. У цьому неважко переконатись, продиференціювавши друге рівняння системи (48) за змінною t_2 та використавши обидва рівняння системи (58). Аналогічним чином встановлюється зв'язок між (56) та (59). Зауважимо, що функції u та S_1, введені в Твердженні 6.1, будуть також розв'язками рівнянь (58) та (59) відповідно. Узагальнення рівнянь (58), (59) та підстановок типу Хопфа-Коула на $(n+1)$-вимірний випадок проведено у Твердженні 6.2.

В скалярному випадку ($N = 1$) усі чотири рівняння (48), (56), (58), (59) будуть еквівалентними. Тобто, множини їх розв'язків збігатимуться. Це можна перевірити, продиференціювавши друге рівняння системи (48) за змінною t_2 та проінтегрувавши за змінною y.

Матричне рівняння Бюргерса (58) допускають природнє узагальнення на $(n+1)$ - вимірний випадок:

$$\alpha_2(S_k)_{t_2} - \sum_{i=1}^{n}c_i(S_k)_{x_ix_i} + 2\sum_{i=1}^{n}c_iS_i(S_k)_{x_i} = 0,\ k = \overline{1,n}, \qquad (60)$$

де $S_k = S_k(t_2, x_1, \ldots, x_n)$ — $(N\times N)$-матричні функції.

Аналогічним чином узагальнюється рівняння (59):

$$\alpha_2(S_k)_{t_2} - \sum_{i=1}^{n}c_i(S_k)_{x_ix_i} + 2\sum_{i=1}^{n}c_i(S_k)_{x_i}S_i = 0,\ k = \overline{1,n}. \qquad (61)$$

Рівняння (60) можна записати і в більш компактній формі:

$$\alpha_2\mathbf{S}_{t_2} = \Delta_2\mathbf{S} - 2\mathbf{S}\nabla_1\mathbf{S}, \qquad (62)$$

де $\mathbf{S} = (S_1, \ldots, S_n)$, $\Delta_2 = \sum_{i=1}^{n}c_i\partial_{x_i}^2$, $\nabla_1 = (c_1\partial_{x_1}, \ldots, c_n\partial_{x_n})^\top$.

Подібним чином можна записати рівняння (61):

$$\alpha_2\tilde{\mathbf{S}}_{t_2} = \Delta_2\tilde{\mathbf{S}} - 2(\nabla_1\tilde{\mathbf{S}}^\top)^\top\tilde{\mathbf{S}}, \tag{63}$$

де $\tilde{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix}$. Для систем (62) та (63) існує аналог лінеаризуючої підстановки Хопфа-Коула. А саме, справедливе таке твердження:

Твердження 6.2. *Нехай функція T задовольняє систему $\alpha_2 T_{t_2} = \Delta_2 T$. Тоді функції $\mathbf{S} := -(T^{-1}T_{x_1}, \dots, T^{-1}T_{x_n})$ та $\tilde{\mathbf{S}} := -\begin{pmatrix} T_{x_1}T^{-1} \\ \vdots \\ T_{x_n}T^{-1} \end{pmatrix}$ задовольнятимуть рівняння (62) та (63) відповідно.*

Тепер перейдемо до вищої симетрії просторово-двовимірного рівняння Бюргерса (55)

$$\begin{cases} \alpha_3 u_{t_3} + c_1 u_{xxx} - c_2 u_{yyy} - 3c_1 v_1 u_{xx} - 3c_1 v_3 u_x + 3c_2 u_y^2 + 3c_2 u u_{yy} - 3c_2 u^2 u_y = 0, \\ v_{1y} = u_x - [v_1, u], \\ v_{3y} = u_{xx} - 2v_1 u_x - [v_3, u]. \end{cases} \tag{64}$$

Для системи (64) допустима редукція: $v_3 = v_{1x} - v_1^2$, після якої вона набуває вигляду

$$\begin{cases} \alpha_3 u_{t_3} + c_1 u_{xxx} - c_2 u_{yyy} - 3c_1 v_1 u_{xx} - 3c_1(v_{1x} - v_1^2)u_x + 3c_2 u_y^2 + 3c_2 u u_{yy} - 3c_2 u^2 u_y = 0, \\ v_{1y} = u_x - [v_1, u]. \end{cases} \tag{65}$$

По аналогії з просторово-двовимірними узагальненнями рівняння Бюргерса другого порядку, розглянемо ще одне рівняння типу Бюргерса третього порядку

$$\begin{cases} \alpha_3 u_{t_3} + c_1 u_{xxx} - c_2 u_{yyy} - 3c_1 u_{xx} v_1 - 3c_1 u_x(v_{1x} - v_1^2) + 3c_2 u_y(u_y - u^2) + 3c_2 u_{yy} u = 0, \\ v_{1y} = u_x - [v_1, u]. \end{cases} \tag{66}$$

Має місце аналог твердження 6.1 для рівнянь (65), (66):

Твердження 6.3. *Нехай $T := T(x, y, t_3)$ — $(N \times N)$-матрична функція, яка задовольняє рівняння $\alpha_3 T_{t_3} + c_1 T_{xxx} - c_2 T_{yyy} = 0$. Тоді:*

1. $N \times N$ матричні функції $u := -T^{-1}T_y$ та $v_1 = -T^{-1}T_x$ задовольняють матричне просторово-двовимірне рівняння Бюргерса (65).

2. $N \times N$ матричні функції $u := -T_y T^{-1}$ та $S_1 = -T_x T^{-1}$ задовольняють матричне просторово-двовимірне рівняння Бюргерса (66).

Розглянемо такі два матричні узагальнення рівняння типу Бюргерса третього порядку:

$$\begin{cases} \alpha_3 u_{t_3} + c_1 u_{xxx} - c_2 u_{yyy} - 3c_1 v_1 u_{xx} - 3c_1(v_{1x} - v_1^2)u_x + 3c_2 u u_{yy} + 3c_2(u_y - u^2)u_y = 0, \\ \alpha_3 v_{1t_3} + c_1 v_{1xxx} - c_2 v_{1yyy} - 3c_1 v_1 v_{1xx} - 3c_1(v_{1x} - v_1^2)v_{1x} + 3c_2 u v_{1yy} + 3c_2(u_y - u^2)v_{1y} = 0. \end{cases} \tag{67}$$

$$\begin{cases} \alpha_3 u_{t_3} + c_1 u_{xxx} - c_2 u_{yyy} - 3c_1 u_{xx} v_1 - 3c_1 u_x(v_{1x} - v_1^2) + 3c_2 u_{yy} u + 3c_2 u_y(u_y - u^2) = 0, \\ \alpha_3 v_{1t_3} + c_1 v_{1xxx} - c_2 v_{1yyy} - 3c_1 v_{1xx} v_1 - 3c_1 v_{1x}(v_{1x} - v_1^2) + 3c_2 v_{1yy} u + 3c_2 v_{1y}(u_y - u^2) = 0. \end{cases} \tag{68}$$

У випадку $N > 1$ розв'язки систем (67) та (68) будуть також розв'язками систем (65) та (66) відповідно. Це перевіряється аналогічним чином як і для рівнянь типу Бюргерса другого порядку.

В скалярному випадку ($N = 1$) рівняння (65), (66), (67) та (68) будуть еквівалентними.

Узагальнення на $(n+1)$-вимірний випадок матричних рівнянь Бюргерса (67) та (68) мають вигляд

$$\alpha_3(v_k)_{t_3} + \sum_{i=1}^n c_i(v_k)_{x_i x_i x_i} - 3\sum_{i=1}^n c_i v_i (v_k)_{x_i x_i} - 3\sum_{i=1}^n c_i(v_{ix_i} - v_i^2)v_{kx_i} = 0,\ k = \overline{1, n}, \tag{69}$$

$$\alpha_3(v_k)_{t_3} + \sum_{i=1}^n c_i(v_k)_{x_i x_i x_i} - 3\sum_{i=1}^n c_i (v_k)_{x_i x_i} v_i - 3\sum_{i=1}^n c_i v_{kx_i}(v_{ix_i} - v_i^2) = 0,\ k = \overline{1, n}, \tag{70}$$

де $v_k = v_k(t_3, x_1, \dots, x_n)$ — $(N \times N)$-матричні функції.

Скорочена форма запису рівнянь (69) виглядає так:

$$\alpha_3 \mathbf{v}_{t_3} + \Delta_3\mathbf{v} - 3\mathbf{v}\nabla_2\mathbf{v} - 3\mathbf{u}\nabla_1\mathbf{v} = 0, \tag{71}$$

де $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $\Delta_3 = \sum_{i=1}^n c_i\partial_{x_i}^3$, $\nabla_2 = (c_1\partial_{x_1}^2, \dots, c_n\partial_{x_n}^2)^\top$, $\nabla_1 = (c_1\partial_{x_1}, \dots, c_n\partial_{x_n})^\top$, $\mathbf{u} = (v_{1x_1} - v_1^2, \dots, v_{nx_n} - v_n^2)$

Аналогічним чином можна записати рівняння (70):

$$\alpha_3\tilde{\mathbf{v}}_{t_3} + \Delta_3\tilde{\mathbf{v}} - 3(\nabla_2\tilde{\mathbf{v}}^\top)^\top\tilde{\mathbf{v}} - 3(\nabla_1\tilde{\mathbf{v}}^\top)^\top\tilde{\mathbf{u}} = 0, \tag{72}$$

де $\tilde{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} v_{1x_1} - v_1^2 \\ \vdots \\ v_{nx_n} - v_n^2 \end{pmatrix}$.

Як і для $(n+1)$-вимірних рівнянь типу Бюргерса другого порядку (див. Твердження 6.2), для рівнянь (71) та (72) теж існує аналог підстановки Хопфа-Коула, тобто, справедливе твердження:

Твердження 6.4. *Нехай функція T задовольняє систему:*

$$\alpha_3 T_{t_3} + \Delta_3 T = 0. \tag{73}$$

Тоді функції $\mathbf{v} := -(T^{-1}T_{x_1}, \dots, T^{-1}T_{x_n})$ та $\tilde{\mathbf{v}} := -\begin{pmatrix} T_{x_1}T^{-1} \\ \vdots \\ T_{x_n}T^{-1} \end{pmatrix}$ задовольнятимуть рівняння (71) та (72) відповідно.

7 Заключні зауваження

1. Метод інтегральних перетворень (бінарних перетворень типу Дарбу, тощо) як метод побудови точних розв'язків нелінійних рівнянь був запропонований спочатку для систем з диференціальним зображенням Лакса [6, 9, 10, 11, 12, 29]. Адаптації цього методу на випадок інтегро-диференціального оператора Лакса в розмірностях (1+1) та (2+1) присвячено роботи [13, 14, 34]. Для зображень Лакса, запропонованих в цій роботі, в яких обидва оператори є інтегро-диференціальними, метод бінарних перетворень потребує подальшого розвинення.

2. Різноманітні (просторові, матричні, тощо) узагальнення класичного рівняння Бюргерса цікаві тісним зв'язком з моделями, інтегровними методом оберненої задачі. Зокрема, в роботах [4, 8] рівняння (56) та (65) в (1+1)-вимірному випадку використовувалися для побудови точних розв'язків рівняння Кадомцева-Петвіашвілі, системи Деві-Стюартсона, їх матричних узагальнень, а також для знаходження розв'язків інших моделей теорії солітонів. В роботі [15] показаний зв'язок між перетворенням типу Хопфа-Коула для матричних узагальнень рівняння Бюргерса та диференціальним оператором перетворення Дарбу-Крама-Матвєєва. Окремо стоїть питання побудови точних розв'язків для рівнянь типу Бюргерса [23, 25, 33], важливих також з точки зору їх фізичних застосувань [3]. Можна показати, що підстановки типу Хопфа-Коула (див. Твердження 6.1–6.4) є частковим (локальним) випадком інтегральних бінарних перетворень, а відповідні рівняння типу Бюргерса є частковим випадком більш загальних нелінійних систем, які допускають "пряму лінеаризацію" [29].

Література

1. Веселов А.П., Новиков С.П. *Конечнозонные двумерные операторы Шрёдингера. Потенциальные операторы* // Докл. АН СССР. – 1984. – Т.279, №4. – С. 784–788.
2. Захаров А.В., Шабат А.Б. *Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I* // Функциональный анализ и его приложения. – Т.8, Вып. 3. – 1974. – С. 43–53.
3. Кудрявцев А.Г., Сапожников О.А. *Получение точных решений неоднородного уравнения Бюргерса с использованием преобразования Дарбу* // Акустический журнал. – 2011. – Т.57, №3. – С. 313–322.
4. Марченко В.А. Нелинейные уравнения и операторные алгебры. – Киев: Наук. думка, 1986. – 156 с.
5. Митропольський Ю.О., Самойленко В.Г, Сидоренко Ю.М. *Просторово-двовимірне узагальнення ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями* // Доповіді НАН України. – 1999. – №9. – С. 19–23.
6. Починайко М.Д., Сидоренко Ю.М. *Інтегрування деяких $(2+1)$-вимірних інтегровних систем методами оберненої задачі розсіяння та бінарних перетворень Дарбу* // Математичні студії. – 2003. – Т.20, №2. – С. 119–132.
7. Самойленко А.М., Самойленко В.Г, Сидоренко Ю.М. *Ієрархія рівнянь Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями: Багатовимірні узагальнення та точні розв'язки редукованих систем* // Укр. мат. журн. – 1999. – Т.51, №1. – С. 78–97.

8. Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М. *Ієрархія матричних рівнянь Бюргерса і інтегровні редукції в системі Деві-Стюардсона* // Укр. мат. журн. – 1998. – Т.50, №2. – С. 252–264.
9. Сидоренко Ю.М. *Нелокальні редукції в системах, інтегровних методом оберненої задачі* // Нелинейные краевые задачи мат.физики и их прилож. Киев: Ин-т математики НАН Украины. – 1998. – С. 199–202.
10. Сидоренко Ю.М. *Про узагальнення τ-функції для ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі* // Вісн. Київського ун-ту. Сер. математика і механіка. – 1998. – С. 40–49.
11. Сидоренко Ю.М. *Бінарні перетворення і $(2+1)$-вимірні інтегровні системи* // Укр. мат. журн. – 2002. – Т.54, №11. – С. 1531–1550.
12. Сидоренко Ю.М., Гвоздева Е.В. *Бинарные преобразования общих уравнений Лакса-Захарова-Шабата* // Нелинейные краев. задачи мат. физики и их прилож. – Киев: Ин-т математики НАН Украины. – 1999. – С. 220–224.
13. Сидоренко Ю.М., Чвартацький О.І. *Бінарні перетворення просторово-двовимірних інтегро-диференціальних операторів і рівнянь Лакса* // Вісн. Київського націон. ун-ту. Сер. математика і механіка. – 2009. – Вип. 22. – С. 32–35.
14. Сидоренко Ю.М., Чвартацький О.І. *Інтегрування скалярної ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі методом інтегральних перетворень типу Дарбу* // Вісн. Львівського ун-ту. Серія механіко-математична. – 2011. – Вип. 75. – С. 10–54.
15. Сидоренко Ю.М., Чвартацький О.І. *Метод проектування і перетворення Дарбу-Крама-Матвєєва* // Математичний вісник НТШ. – 2012. – Том 9. (прийнята до друку).
16. Шабат А.Б. Энциклопедия интегрируемых систем. – Москва: Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау, 2008. – 454 с.
17. Athorne C., Fordy A.P. *Integrable equations in $(2+1)$-dimensions associated with symmetric and homogeneous spaces*, J. Math. Phys., **28** (1987), 2018–2024.
18. Blaszak M. Multi-Hamiltonian Theory of Dynamical Systems, Springer-Verlag, 1998.
19. Chen H.H., Lee Y.C., Liu C.S. *Integrability of nonlinear Hamiltonian systems by inverse scattering method*, Physica Scr., **20** (1979), 490–492.
20. Cheng Yi. *Constrained of the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy*, J. Math. Phys., **33** (1992), 3774–3787.
21. Davey A., Stewartson K. *On three dimensional packets of surface waves*, Proc. R. Soc., **338**, 1613 (1974), 101–110.
22. Dickey L.A. *Soliton equations and Hamiltonian systems*, Adv. Ser. in Math. Phys., **12** (1991).
23. Fletcher C.A.J. *Generating exact solutions of the two-dimensional Burgers' equations*, Int. J. Numer. Meth. Fluids, **3** (1983), 213–216.
24. Fokas A.S. *On the simplest integrable equation in $2+1$*, Inverse Problems, **10** (1994), 19–22.
25. Guoliang Cai, Kun Ma, Xiaofen Tang, Fengyun Zhang. *New exact Traveling Wave Solutions of the $(2+1)$-dimension Burgers Equations*, Internat. J. of Nonlinear Science, **6**, 2 (2008), 185–192.
26. Konopelchenko B., Sidorenko Yu., Strampp W. *$(1+1)$-dimensional integrable systems as symmetry constraints of $(2+1)$-dimensional systems*, Phys. Lett. A., **157** (1991), 17–21.
27. Mikhailov A.V., Shabat A.B., Sokolov V.V. *The symmetry approach to classification of integrable equations In: What is Integrability?*, New York: Springer Verlag, (1990), 115–184.
28. Nizhnik L., *Integration of multidimensional nonlinear equations by inverse scattering method*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **254** (1980), 332–335.

29. Samoilenko V.H., Sidorenko Yu.M., Buonanno L., Matarazzo G. *Explicit solutions of nonlinear evolution equations via nonlocal reductions approach*, Proceedings of Institute of Math. of NAS of Ukraine, **30**, II (2000), 406–410.

30. Santini P.M. *Integrable nonlinear evolution equations with constraints: I*, Inverse Problem, **8** (1992), 285–301.

31. Sidorenko Yu., Strampp W. *Multicomponent integrable reductions in Kadomtsev-Petviashvilli hierarchy*, J. Math. Phys., **34**, 4 (1993), 1429–1446.

32. Sidorenko Yu., Strampp W. *Symmetry constraints of the KP-hierarchy*, Inverse Problems, **7** (1991), L37–L43.

33. Srinivasa Ch. Rao, Engu Satyanarayana. *Solutions of Burgers Equation*, International Journal of Nonlinear Science, **9**, 3 (2010), 290–295.

34. Sydorenko Yu. *Generalized Binary Darboux-like Theorem for Constrained Kadomtsev-Petviashvili (cKP) Flows*, Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, **50**, 1 (2004), 470–477.

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Львів, Україна
e-mail: *y_sydorenko@franko.lviv.ua*

Надійшло 12.04.2012

Sydorenko Yu.M., Chvartatskyi O.I. *Matrix generalizations of integrable systems with Lax integro-differential representations*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 125–144.

We found matrix integro-differential Lax representations for Davey-Stewartson systems (DS-I, DS-II, DS-III), (2+1)-dimensional generalizations of Chen-Lee-Liu equation and its higher symmetries. In particular, we obtain (2+1)-dimensional generalizations of modified Korteweg-de Vries equation, Nizhnik equation and so etc. We also propose some matrix multidimensional generalizations of Burgers equation.

Сидоренко Ю.М., Чвартацкий А.И. *Матричные обощения интегрируемых систем с интегро-дифференциальными представлениями Лакса* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 125–144.

Найдены матричные интегро-дифференциальные представления Лакса для моделей Дэви-Стюартсона (DS-I, DS-II, DS-III), пространственно-двумерных обобщений уравнения Чена-Ли-Лю и их высших симметрий. А именно, модифицированных уравнений Кортевега- де Фриза, Нижника и т.д. Приведены некоторые матричные многомерные обобщения уравнения Бюргерса.

Карпатські математичні публікації. Т.4, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №1

УДК 512.538

Стефлюк С.Д.

ДВА КЛАСИ ВЗАЄМНО ОБЕРНЕНИХ МНОГОЧЛЕНІВ РОЗБИТТІВ

Стефлюк С.Д. *Два класи взаємно обернених многочленів розбиттів* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — С. 145–154.

При допомозі парафункцій трикутних матриць досліджуються два класи взаємно обернених многочленів розбиттів.

1 Вступ

У [8] були введені многочлени від багатьох змінних, пов'язані із диференціюванням складних функцій (формула Бруно), в яких підсумовування проводиться за невпорядкованими розбиттями натурального числа на натуральні доданки. У монографії Ріордана [5] ці многочлени були названі многочленами Белла. Циклові індикатори симетричних груп (див. [5, с. 82–85]) також є деякими многочленами розбиттів. Многочлени розбиттів з'являються також у формулі Варінга [6], в якій степеневі суми виражаються через елементарні симетричні многочлени та у багатьох інших випадках. Дослідження властивостей деяких многочленів розбиттів їх узагальнень та інтерпретацій можна знайти також у роботах Платонова [4], Кузьміна і Леонової [2], [3].

Взаємно обернені пари многочленів розбиттів

$$y_n = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} c(n;\lambda_1,\ldots\lambda_n)\cdot x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},$$

$$x_n = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} d(n;\lambda_1,\ldots\lambda_n)\cdot y_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot y_n^{\lambda_n}$$

виникають, зокрема, у теорії чисел (див. [1, с. 304–307]) та теорії симетричних многочленів (див. [1, с. 336–338]).

У статті вивчаються два загальні класи взаємно обернених многочленів розбиттів.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 15A15.
Ключові слова і фрази: парафункцій трикутних матриць, многочленів розбиттів.

2 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ПРО ПАРАФУНКЦІЇ ТРИКУТНИХ МАТРИЦЬ ТА МНОГОЧЛЕНИ РОЗБИТТІВ

Нехай K — деяке числове поле.

Означення 2.1. [1]. *Трикутну таблицю*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_n \tag{1}$$

чисел із числового поля K назвемо **трикутною матрицею**, *елемент a_{11} — верхнім елементом цієї трикутної матриці, а число n — її порядком.*

Означення 2.2. [1]. *Нехай A — трикутна матриця (1). Парадетермінантом та параперманентом трикутної матриці A називають відповідно числа:*

$$\operatorname{ddet}(A) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} (-1)^{n-r} \prod_{s=1}^{r} \{a_{p_1+\ldots+p_s, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\},$$

$$\operatorname{pper}(\mathrm{A}) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} \prod_{s=1}^{r} \{a_{p_1+\ldots+p_s, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\},$$

де підсумовування проводиться за множиною натуральних розв'язків рівняння $p_1 + p_2 + \ldots + p_r = n$, а символом $\{a_{i,j}\}$ позначено факторіальний добуток елемента $a_{i,j}$, що задається рівністю $\{a_{ij}\} = \prod\limits_{k=j}^{i} a_{ik}$.

Розглянемо трикутну матрицю вигляду

$$A = \begin{pmatrix} \tau_{11} \cdot x_1 & & & \\ \tau_{21} \cdot \frac{x_2}{x_1} & \tau_{22} \cdot x_1 & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ \tau_{n1} \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}} & \tau_{n2} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \ldots & \tau_{nn} \cdot x_1 \end{pmatrix}_n = \left(\tau_{ij} \cdot \frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}} \right)_{1 \le j \le i \le n}, \tag{2}$$

де $x_0 = 1$, τ_{ij} — деякі дробово-раціональні функції аргументів i, j.

Означення 2.3. *Многочленами розбиттів назвемо многочлени виду*

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} c(n; \lambda_1, \ldots \lambda_n) \cdot x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n},$$

де λ_i — цілі невід'ємні числа, а $c(n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ — деякі дробово-раціональні вирази.

У [1] доведено, що парафункції трикутних матриць виду (2) є матричними зображеннями деяких многочленів розбиттів, причому справедлива теорема

Теорема 1. *Справедливі наступні формули обернення многочленів розбиттів:*

1)

$$y_i = \left\langle \tau_{sr} \frac{x_{s-r+1}}{x_{s-r}} \right\rangle_{1 \leqslant r \leqslant s \leqslant i}, \quad x_i = \left\langle \tau_{s,s-r+1}^{-1} \frac{y_{s-r+1}}{y_{s-r}} \right\rangle_{1 \leqslant r \leqslant s \leqslant i}, \ i = 1, 2, \ldots;$$

2)

$$y_i = \left[\tau_{sr} \frac{x_{s-r+1}}{x_{s-r}} \right]_{1 \leqslant r \leqslant s \leqslant i}, \quad x_i = (-1)^{i-1} \left\langle \tau_{s,s-r+1}^{-1} \frac{y_{s-r+1}}{y_{s-r}} \right\rangle_{1 \leqslant r \leqslant s \leqslant i}, \ i = 1, 2, \ldots.$$

Таким чином, при допомозі теореми 1 можна будувати загальні класи взаємно обернених многочленів розбиттів. Для цього потрібно так підібрати елементи τ_{ij} у матриці (2), щоб парафункції матриць із цієї теореми можна було явно виразити у вигляді сум за невпорядкованими розбиттями.

Теорема 2. [7]. *Нехай*

$$Z_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & & & & & & \\ \frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & & & \\ \ldots & \ldots & \ddots & & & & \\ \frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \ldots & x_1 & & & \\ 0 & \frac{x_n}{x_{n-1}} & \ldots & \frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & \frac{x_n}{x_{n-1}} & \ldots & \frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{pmatrix}_m, \ n \leqslant m,$$

тоді справедливі тотожності:

$$\operatorname{pper}(Z_m(x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=m} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \cdot x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n},$$

$$\operatorname{ddet}(Z_m(x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=m} (-1)^{m-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \cdot x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n},$$

де λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — цілі невід'ємні числа.

3 ВЗАЄМНО ОБЕРНЕНІ МНОГОЧЛЕНИ РОЗБИТТІВ

Теорема 3. *Справедливі рівності:*

$$y_n = \left\langle \begin{matrix} a_1 x_1 & & & & \\ \frac{a_2}{a_1} \frac{x_2}{x_1} & a_1 x_1 & & & \\ \frac{a_3}{a_2} \frac{x_3}{x_2} & \frac{a_2}{a_1} \frac{x_2}{x_1} & a_1 x_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \ldots & \frac{a_2}{a_1} \frac{x_2}{x_1} & a_1 x_1 \end{matrix} \right\rangle_n$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k} k! \frac{a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{\lambda_n}}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

$$x_n = \left\langle \begin{array}{lllll} \frac{1}{a_1}y_1 & & & & \\ \frac{1}{a_1}\frac{y_2}{y_1} & \frac{a_1}{a_2}y_1 & & & \\ \frac{1}{a_1}\frac{y_3}{y_2} & \frac{a_1}{a_2}\frac{y_2}{y_1} & \frac{a_2}{a_3}y_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{1}{a_1}\frac{y_n}{y_{n-1}} & \frac{a_1}{a_2}\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \cdots & \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\frac{y_2}{y_1} & \frac{a_{n-1}}{a_n}y_1 \end{array} \right\rangle_n$$

$$= \frac{1}{a_n} \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k} \frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot y_n^{\lambda_n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$. *Причому взаємно обернені многочлени розбиттів (3), (4) задовольняють відповідно рекурентні рівності*

$$y_n = a_1 x_1 y_{n-1} + \ldots + (-1)^{n-2} a_{n-1} x_{n-1} y_1 + (-1)^{n-1} a_n x_n y_0,\ y_0 = 1, y_{<0} = 0, \tag{5}$$

$$x_n = \frac{a_{n-1}}{a_n} y_1 x_{n-1} + \ldots + (-1)^{n-2} \frac{a_1}{a_n} y_{n-1} x_1 + (-1)^{n-1} \frac{1}{a_n} y_n x_0,\ x_0 = 1, x_{<0} = 0. \tag{6}$$

Доведення. Для доведення рівностей (3), (4) достатньо замінити у теоремі 2 при $m = n$ змінні $x_i, i = 1, 2, \ldots,$ виразами $a_i x_i$. Далі слід зауважити, що многочлени розбиттів (3), (4), внаслідок теореми 1, взаємно обернені до многочленів розбиттів (3). Винесемо із j-го стовпця ($j = 1, 2, \ldots$) за знак парадетермінанта множник $\frac{a_{j-1}}{a_j}$, (тут ми вважаємо, що $a_0 = 1$) тоді отримаємо очевидні рівності

$$x_n = \frac{1}{a_1}\frac{a_1}{a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_{n-1}}{a_n} \left\langle \frac{y_{i-j+1}}{y_{i-j}} \right\rangle_{1 \le j \le i \le n}$$

$$= \frac{1}{a_n} \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k} \cdot \frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot y_n^{\lambda_n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Для доведення того факту, що многочлени розбиттів (3), (4) задовольняють відповідно рекурентні рівності (5), (6) достатньо розкласти парадетермінанти із рівностей (3), (4) за елементами останнього рядка. □

Теорема 4. *Справедливі рівності:*

$$y_n = \left[\begin{array}{lllll} a_1 x_1 & & & & \\ \frac{a_2}{a_1}\frac{x_2}{x_1} & a_1 x_1 & & & \\ \frac{a_3}{a_2}\frac{x_3}{x_2} & \frac{a_2}{a_1}\frac{x_2}{x_1} & a_1 x_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & \frac{a_2}{a_1}\frac{x_2}{x_1} & a_1 x_1 \end{array} \right]_n$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} k! \frac{a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$x_n = (-1)^{n-1} \left\langle \begin{array}{lllll} \frac{1}{a_1}y_1 & & & & \\ \frac{1}{a_1}\frac{y_2}{y_1} & \frac{a_1}{a_2}y_1 & & & \\ \frac{1}{a_1}\frac{y_3}{y_2} & \frac{a_1}{a_2}\frac{y_2}{y_1} & \frac{a_2}{a_3}y_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{1}{a_1}\frac{y_n}{y_{n-1}} & \frac{a_1}{a_2}\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \cdots & \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\frac{y_2}{y_1} & \frac{a_{n-1}}{a_n}y_1 \end{array} \right\rangle_n$$

$$= \frac{1}{a_n} \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{k-1} \frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot y_n^{\lambda_n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$. *Причому взаємно обернені многочлени розбиттів (3), (4) задовольняють відповідно рекурентні рівності*

$$y_n = a_1 x_1 y_{n-1} + a_2 x_2 y_{n-2} + \ldots + a_{n-1} x_{n-1} y_1 + a_n x_n y_0,\ y_0 = 1, y_{<0} = 0,$$

$$x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} y_1 x_{n-1} - \frac{a_{n-2}}{a_n} y_2 x_{n-2} - \ldots - \frac{a_1}{a_n} y_{n-1} x_1 + \frac{1}{a_n} y_n x_0,\ x_0 = 1, x_{<0} = 0.$$

Доведення цієї теореми аналогічне до доведення теореми 3.

4 Приклади взаємно обернених многочленів розбиттів

1. Розглянемо перший випадок, при $a_i = i!$, де $i = 1, 2, \ldots, n$, отримаємо:

$$y_n = 1! x_1 y_{n-1} - 2! x_2 y_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2} (n-1)! x_{n-1} y_1 + (-1)^{n-1} (n)! x_n y_0,\ y_0 = 1, y_{<0} = 0.$$

$$y_n = \left\langle \begin{array}{lllll} x_1 & & & & \\ 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ 3\frac{x_3}{x_2} & 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ n\frac{x_n}{x_{n-1}} & (n-1)\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{array} \right\rangle_n$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k} k! \frac{1!^{\lambda_1} 2!^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot n!^{\lambda_n}}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

$$x_n = \frac{1}{n^{\underline{1}}} y_1 x_{n-1} - \frac{1}{n^{\underline{2}}} y_2 x_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2} \frac{1}{n^{\underline{n-1}}} y_{n-1} x_1 + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{\underline{n}}} y_n x_0,\ x_0 = 1, x_{<0} = 0.$$

$$x_n = \left\langle \begin{array}{lllll} y_1 & & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & \frac{1}{2}y_1 & & & \\ \frac{y_3}{y_2} & \frac{1}{2}\frac{y_2}{y_1} & \frac{1}{3}y_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & \frac{1}{2}\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \cdots & \frac{1}{n-1}\frac{y_2}{y_1} & \frac{1}{n}y_1 \end{array} \right\rangle_n$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k} \cdot \frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot y_n^{\lambda_n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

2. Розглянемо другий випадок, при $a_i = \frac{1}{i!}$, де $i = 1, 2, \ldots, n$ будемо мати:

$$y_n = \frac{1}{1!}x_1y_{n-1} - \frac{1}{2!}x_2y_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{1}{(n-1)!}x_{n-1}y_1 + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n)!}x_ny_0,\ y_0 = 1,\ y_{<0} = 0.$$

$$y_n = \left\langle \begin{array}{ccccc} x_1 & & & & \\ \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \frac{1}{3}\frac{x_3}{x_2} & \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \frac{1}{n}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{1}{n-1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \ldots & \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{array} \right\rangle_n$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k}\frac{k!}{\lambda_1!\cdot(1!)^{\lambda_1}\cdot\lambda_2\cdot(2)!^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_n\cdot(n!)^{\lambda_n}}x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},\quad n = 1, 2, \ldots,$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

$$x_n = n^{\underline{1}}y_1x_{n-1} - n^{\underline{2}}y_2x_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}n^{\underline{n-1}}y_{n-1}x_1 + (-1)^{n-1}n^{\underline{n}}y_nx_0,\ x_0 = 1,\ x_{<0} = 0.$$

$$x_n = \left\langle \begin{array}{ccccc} y_1 & & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & 2y_1 & & & \\ \frac{y_3}{y_2} & 2\frac{y_2}{y_1} & 3y_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & 2\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \ldots & (n-1)\frac{y_2}{y_1} & ny_1 \end{array} \right\rangle_n$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k}\cdot\frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}y_1^{\lambda_1}y_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot y_n^{\lambda_n},\quad n = 1, 2, \ldots.$$

3. Розглянемо третій випадок, при $a_i = i$, де $i = 1, 2, \ldots, n$, отримаємо:

$$y_n = x_1y_{n-1} - 2x_2y_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}(n-1)x_{n-1}y_1 + (-1)^{n-1}nx_ny_0,\ y_0 = 1,\ y_{<0} = 0.$$

$$y_n = \left\langle \begin{array}{ccccc} x_1 & & & & \\ 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \frac{3}{2}\frac{x_3}{x_2} & 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \frac{n}{n-1}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{n-1}{n-2}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \ldots & 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{array} \right\rangle_n$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k}k!\frac{1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n}x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},\quad n = 1, 2, \ldots,$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

$$x_n = \frac{n-1}{n}y_1x_{n-1} - \frac{n-2}{n}y_2x_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{1}{n}y_{n-1}x_1 + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}y_nx_0,\ x_0 = 1,\ x_{<0} = 0.$$

$$x_n = \left\langle \begin{array}{ccccc} y_1 & & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & \frac{1}{2}y_1 & & & \\ \frac{y_3}{y_2} & \frac{1}{2}\frac{y_2}{y_1} & \frac{2}{3}y_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & \frac{1}{2}\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \ldots & \frac{n-2}{n-1}\frac{y_2}{y_1} & \frac{n-1}{n}y_1 \end{array} \right\rangle_n$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k}\cdot\frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}y_1^{\lambda_1}y_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot y_n^{\lambda_n},\quad n = 1, 2, \ldots.$$

4. Розглянемо випадок при $a_i = \frac{1}{i}$, де $i = 1, 2\ldots, n$, отримаємо:

$$y_n = x_1y_{n-1} - \frac{1}{2}x_2y_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{1}{n-1}x_{n-1}y_1 + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x_ny_0,\ y_0 = 1,\ y_{<0} = 0.$$

$$y_n = \left\langle \begin{array}{ccccc} x_1 & & & & \\ \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \frac{2}{3}\frac{x_3}{x_2} & \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \frac{n-1}{n}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{n-2}{n-1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \ldots & \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{array} \right\rangle_n$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k}\frac{k!}{1^{\lambda_1}\cdot\lambda_1!\cdot2^{\lambda_2}\cdot\lambda_2!\cdot\ldots\cdot n^{\lambda_n}\cdot\lambda_n!}x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},\quad n = 1, 2, \ldots,$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

$$x_n = \frac{n}{n-1}y_1x_{n-1} - \frac{n}{n-2}y_2x_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}n\cdot y_{n-1}x_1 + (-1)^{n-1}n\cdot y_nx_0,\ x_0 = 1,\ x_{<0} = 0.$$

$$x_n = \left\langle \begin{array}{ccccc} y_1 & & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & 2y_1 & & & \\ \frac{y_3}{y_2} & 2\frac{y_2}{y_1} & \frac{2}{3}y_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & 2\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \ldots & \frac{n-1}{n-2}\frac{y_2}{y_1} & \frac{n}{n-1}y_1 \end{array} \right\rangle_n$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k}\cdot\frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}y_1^{\lambda_1}y_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot y_n^{\lambda_n},\quad n = 1, 2, \ldots.$$

Підставивши у теорему 4 ті ж значення, що і в теорему 3, отримаємо:

Теорема 5. *При* $a_i = i!$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$y_n = \left[\begin{array}{ccccc} x_1 & & & & \\ 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ 3\frac{x_3}{x_2} & 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ n\frac{x_n}{x_{n-1}} & n-1\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \ldots & 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{array} \right]_n$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} k!\frac{1!^{\lambda_1}2!^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot n!^{\lambda_n}}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},\quad n = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

$$x_n=(-1)^{n-1}\left\langle\begin{matrix} y_1 & & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & \frac{1}{2}y_1 & & & \\ \frac{y_3}{y_2} & \frac{1}{2}\frac{y_2}{y_1} & \frac{1}{3}y_1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & \frac{1}{2}\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \dots & \frac{1}{n-1}\frac{y_2}{y_1} & \frac{1}{n}y_1 \end{matrix}\right\rangle_n$$

$$=\frac{1}{n!}\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}(-1)^{k-1}\frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}y_1^{\lambda_1}y_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot y_n^{\lambda_n},\quad n=1,2,\ldots,\qquad(9)$$

де $k=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$. *Причому взаємно обернені многочлени розбиттів (8), (9) задовольняють відповідно рекурентні рівності*

$$y_n=x_1y_{n-1}+2!x_2y_{n-2}+\ldots+(n-1)!x_{n-1}y_1+n!x_ny_0,\ y_0=1,\ y_{<0}=0,$$

$$x_n=-\frac{1}{n^{\underline{1}}}y_1x_{n-1}-\frac{1}{n^{\underline{2}}}y_2x_{n-2}-\ldots-\frac{1}{n^{\underline{n-1}}}y_{n-1}x_1+\frac{1}{n^{\underline{n}}}y_nx_0,\ x_0=1,x_{<0}=0.$$

Теорема 6. *При* $a_i=\frac{1}{i!}$, $i=1,2,\ldots,n$,

$$y_n=\begin{bmatrix} x_1 & & & & \\ \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \frac{1}{3}\frac{x_3}{x_2} & \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \frac{1}{n}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{1}{n-1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \dots & \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{bmatrix}_n$$

$$=\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}\frac{k!}{1!^{\lambda_1}\cdot\lambda_1!\cdot2!^{\lambda_2}\cdot\lambda_2!\cdot\ldots\cdot n!^{\lambda_n}\cdot\lambda_n!}x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},\quad n=1,2,\ldots.\qquad(10)$$

$$x_n=(-1)^{n-1}\left\langle\begin{matrix} y_1 & & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & 2y_1 & & & \\ \frac{y_3}{y_2} & 2\frac{y_2}{y_1} & 3y_1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & 2\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \dots & (n-1)\frac{y_2}{y_1} & ny_1 \end{matrix}\right\rangle_n$$

$$=n!\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}(-1)^{k-1}\frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}y_1^{\lambda_1}y_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot y_n^{\lambda_n},\quad n=1,2,\ldots,\qquad(11)$$

де $k=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$. *Причому взаємно обернені многочлени розбиттів (10), (11) задовольняють відповідно рекурентні рівності*

$$y_n=x_1y_{n-1}+\frac{1}{2!}x_2y_{n-2}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}x_{n-1}y_1+\frac{1}{n!}x_ny_0,\ y_0=1,y_{<0}=0,$$

$$x_n=-n^{\underline{1}}y_1x_{n-1}-n^{\underline{2}}y_2x_{n-2}-\ldots-n^{\underline{n-1}}y_{n-1}x_1+n^{\underline{n}}y_nx_0,\ x_0=1,x_{<0}=0.$$

Теорема 7. *При* $a_i=\frac{1}{i}$, $i=1,2,\ldots,n$,

$$y_n=\begin{bmatrix} x_1 & & & & \\ \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \frac{2}{3}\frac{x_3}{x_2} & \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \frac{n-1}{n}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{n-2}{n-1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \dots & \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{bmatrix}_n$$

$$=\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}\frac{k!}{1^{\lambda_1}\cdot\lambda_1!\cdot2^{\lambda_2}\cdot\lambda_2!\cdot\ldots\cdot n^{\lambda_n}\cdot\lambda_n!}x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},\quad n=1,2,\ldots.\qquad(12)$$

$$x_n=(-1)^{n-1}\left\langle\begin{matrix} y_1 & & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & 2y_1 & & & \\ \frac{y_3}{y_2} & 2\frac{y_2}{y_1} & \frac{3}{2}y_1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & 2\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \dots & \frac{n-1}{n-2}\frac{y_2}{y_1} & \frac{n}{n-1}y_1 \end{matrix}\right\rangle_n$$

$$=n\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}(-1)^{k-1}\frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}y_1^{\lambda_1}y_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot y_n^{\lambda_n},\quad n=1,2,\ldots.\qquad(13)$$

де $k=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$. *Причому взаємно обернені многочлени розбиттів (12), (13) задовольняють відповідно рекурентні рівності*

$$y_n=x_1y_{n-1}+\frac{1}{2}x_2y_{n-2}+\ldots+\frac{1}{n-1}x_{n-1}y_1+\frac{1}{n}x_ny_0,\ y_0=1,y_{<0}=0,$$

$$x_n=-\frac{n}{n-1}y_1x_{n-1}-\frac{n}{n-2}y_2x_{n-2}-\ldots-ny_{n-1}x_1+ny_nx_0,\ x_0=1,x_{<0}=0.$$

Теорема 8. *При* $a_i=i$, $i=1,2,\ldots,n$,

$$y_n=\begin{bmatrix} x_1 & & & & \\ 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \frac{3}{2}\frac{x_3}{x_2} & 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \frac{n}{n-1}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{n-1}{n-2}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \dots & 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{bmatrix}_n$$

$$=\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}k!\frac{1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},\quad n=1,2,\ldots\qquad(14)$$

$$x_n=(-1)^{n-1}\left\langle\begin{matrix} y_1 & & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & \frac{1}{2}y_1 & & & \\ \frac{y_3}{y_2} & \frac{1}{2}\frac{y_2}{y_1} & \frac{2}{3}y_1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & \frac{1}{2}\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \dots & \frac{n-2}{n-1}\frac{y_2}{y_1} & \frac{n-1}{n}y_1 \end{matrix}\right\rangle_n$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}(-1)^{k-1}\frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}y_1^{\lambda_1}y_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot y_n^{\lambda_n},\quad n=1,2,\ldots,\qquad(15)$$

де $k=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$. *Причому взаємно обернені многочлени розбиттів (14), (15) задовольняють відповідно рекурентні рівності*

$$y_n=x_1y_{n-1}+2x_2y_{n-2}+\ldots+(n-1)x_{n-1}y_1+nx_ny_0,\ y_0=1,y_{<0}=0,$$

$$x_n=-\frac{n-1}{n}y_1x_{n-1}-\frac{n-2}{n}y_2x_{n-2}-\ldots-\frac{1}{n}y_{n-1}x_1+\frac{1}{n}y_nx_0,\ x_0=1,x_{<0}=0.$$

Література

1. Заторський Р.А. Числення трикутних матриць та його застосування. — Івано-Франківськ: Сімик. 2010. — 508 с.
2. Кузьмин О.В. *Рекуррентные соотношения и перечислительные интерпретации некоторых комбинаторных чисел и полиномов* // Дискретная математика. — 1994. — Т.6. №3. — С. 39–49.
3. Кузьмин О.В., Леонова О.В. *О полиномах разбиений* // Дискретная математика. — 2001. — Т.13, №2. — С. 144–158.
4. Платонов М.Л. Комбинаторные числа класса отображений и их приложения. — М.: Наука. 1979. — 154 с.
5. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. — М.: ИЛ, 1963.
6. Серре Н.А. Курс высшей алгебры. — М.: Изд-во т-ва М.О. Вольф, 1902.
7. Заторський Р.А. *Парафункції матриць похилої структури та многочлени розбиттів* // Наук. вісн. Чернівецького нац. ун-ту. Математика. — 2011. — Т.1. №4. — С. 59–66.
8. Bell E.T. *Partition polynomials*, Ann. Math., **29** (1927), 38–46.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

Надійшло 10.04.2012

Stefluk S.D. *Two classes of mutually inverse polynomials of partitions*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 145–154.

By means of triangular matrices parafunctions two classes of mutually inverse polynomial of partitions are investigated.

Стефлюк С.Д. *Два класса взаимно обратных многочленов разбиений* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 145–154.

При помощи парафункций треугольных матриц исследуются два класса взаимно обратных многочленов разбиений.

Карпатські математичні публікації. Т.4, №1 — Carpathian Mathematical Publications. V.4, №1

УДК 517.53

Khrystiyanyn A.Ya., Kondratyuk A.A.

MEROMORPHIC MAPPINGS OF TORUS ONTO THE RIEMANN SPHERE

Khrystiyanyn A.Ya., Kondratyuk A.A. *Meromorphic mappings of torus onto the Riemann sphere*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 155–159.

The meromorphic mappings of the two dimensional torus onto the Riemann sphere are studied. Their connections with loxodromic meromorphic functions in the punctured plane are considered.

Let $\mathcal{T}$ be a two-dimensional torus in $\mathbb{R}^3$ obtained by the rotation of the unit circle in the $\xi O\zeta$ plane centered at $(l, 0)$, $l > 1$, around the ζ axis. Its parametric representation is

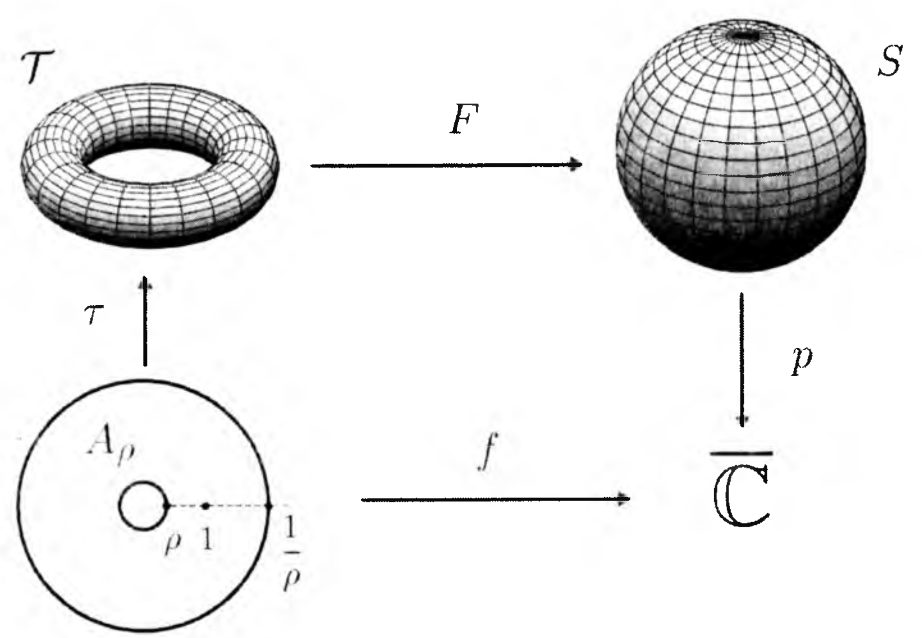
$$\begin{aligned} \xi &= (l + \cos\psi)\cos\varphi, \\ \eta &= (l + \cos\psi)\sin\varphi, \\ \zeta &= \sin\psi, \end{aligned} \qquad (1)$$

$0 \le \varphi \le 2\pi$, $-\pi \le \psi \le \pi$.

The torus $\mathcal{T}$ can be obtained also by a continuous map τ of $\overline{A}_\rho$, $A_\rho = \{z : \rho < |z| < \frac{1}{\rho}\}$, in $\mathbb{R}^3$ so that τ is homeomorphic to the interior of A_ρ, $\tau(\overline{A}_\rho) = \mathcal{T}$, and $\tau(\rho e^{i\varphi}) = \tau(\frac{1}{\rho}e^{i\varphi})$, for each φ from $[0, 2\pi]$.

A mapping F of $\mathcal{T}$ into the Riemann sphere S is said to be *meromorphic* if there is a meromorphic function f on $\overline{A}_\rho$ such that $f = p \circ F \circ \tau$, where p is the stereographic projection of S on $\overline{\mathbb{C}}$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 30D35.
Key words and phrases: meromorphic function, loxodromic function, torus, toroidal derivative, Ahlfors-Shimizu characteristic.



Put $q = \rho^2$. Since $\tau(qz) = \tau(z)$ for $|z| = \frac{1}{\rho}$ then

$$f(qz) = f(z). \tag{2}$$

Let us show that f has the meromorphic extension in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ by relation (2). Indeed, put $g(z) = f(\frac{z}{\rho})$ and $\widetilde{g}(z) = g(qz)$. Since $g(z)$ is meromorphic in the closure of the annulus $\{z : q < |z| < 1\}$ there is $\varepsilon > 0$ such that $g(z)$ is meromorphic in the annulus $\{z : q - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon\}$ and $\widetilde{g}(z)$ is meromorphic for z satisfying the inequalities $q - \varepsilon < q|z| < 1 + \varepsilon$, i.e. in the annulus

$$\left\{z : 1 - \frac{\varepsilon}{q} < |z| < \frac{1}{q} + \frac{\varepsilon}{q}\right\}.$$

However, $g(e^{i\varphi}) = g(qe^{i\varphi}) = \widetilde{g}(e^{i\varphi})$. By the uniqueness theorem $\widetilde{g}(z)$ coincides with $g(z)$ in $\{z : 1 - \frac{\varepsilon}{q} < |z| < 1 + \varepsilon\}$. Hence, $\widetilde{g}(z)$ is a meromorphic extension of $g(z)$ in the closure of the annulus $\{z : 1 < |z| < \frac{1}{q}\}$. By induction f admits the meromorphic extension in $\mathbb{C}^*$ which satisfies (2).

Now we can conclude that to any meromorphic function on a torus corresponds a multiplicatively periodic (loxodromic) meromorphic function of a multiplicator q, $0 < q < 1$, and vise versa. A slight modification of our construction above shows that this is true not only for positive q but for arbitrary complex q satisfying the inequality $|q| < 1$ [4], [5].

An example of loxodromic function of such a multiplicator is

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{q^n z}{(1 - q^n z)^2}.$$

The *mapping* $\tau(z)$ is called of *conformal type* if there exists a positive continuous function $\varkappa(z)$ on $\overline{A}_\rho$ such that

$$ds_{\mathcal{T}} = \varkappa(z)|dz|, \quad z = re^{i\varphi}, \tag{3}$$

where $ds_{\mathcal{T}}$ is the length element on $\mathcal{T}$.

Lemma 1. *There are a unique l and a unique mapping τ of conformal type which maps $\overline{A}_\rho$ onto $\mathcal{T}$.*

Proof. We have $ds^2_{\mathcal{T}} = d\psi^2 + (l + \cos\psi)^2 d\varphi^2$, and $|dz|^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$. Relation (3) implies

$$\begin{gathered} d\psi^2 + (l + \cos\psi)^2 d\varphi^2 = \varkappa^2(z)(dr^2 + r^2 d\varphi^2), \\ (l + \cos\psi) = \varkappa(z) r, \\ d\psi = \varkappa(z) dr, \end{gathered} \tag{4}$$

and, consequently,

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\psi}{l + \cos\psi},$$

what together with the conditions $\psi(\rho) = -\pi$, $\psi(1/\rho) = \pi$, and the first of the relation (4) yields

$$\operatorname{tg}\frac{\psi(r)}{2} = \sqrt{\frac{l+1}{l-1}}\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{l^2-1}}{2}\log r\right),$$

$$l = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{\log^2\rho}},$$

and

$$\varkappa(z) = \frac{l + \cos\psi(r)}{r}, \quad r = |z|.$$

Thus, $\tau(z)$ is the mapping of conformal type by which to any $z = re^{i\varphi}$ from $\overline{A}_\rho$ corresponds a point from $\mathcal{T}$ given by (1) with

$$\psi = \psi(r) = 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{l+1}{l-1}}\operatorname{tg}\left(\frac{l^2-1}{2}\log r\right)\right).$$

□

If a loxodromic function $f(z)$ is not identically constant then it has two essential singularities at $z = 0$ and $z = \infty$ [5], [2]. In order to investigate its behaviour as $|z| \to 0$ and $|z| \to \infty$ consider the following geometric characteristics.

Let F be a nonconstant meromorphic mapping of $\mathcal{T}$ onto S. Let $|dF|_S$ be the length element by this mapping.

The *toroidal derivative* of F is said to be

$$\mathring{F}_{\mathcal{T}} := \frac{|dF|_S}{ds_{\mathcal{T}}}.$$

Let $d\sigma$, $d\sigma_S$, $d\sigma_{\mathcal{T}}$ be area elements on $\mathbb{C}^*$, S, and $\mathcal{T}$ respectively, $\tau(z)$ be of conformal type,

$$f = p \circ F \circ \tau, \quad G_r = \tau(A_{1/r}), \quad A_{1/r} = \{z : \frac{1}{r} \le |z| \le r\}.$$

The spherical area of the image of G_r is

$$A_{\mathcal{T}}(r, F) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{G_r}\left(\frac{|dF|_S}{ds_{\mathcal{T}}}\right)^2 d\sigma_{\mathcal{T}} = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{G_r}(\mathring{F}_{\mathcal{T}})^2\, d\sigma_{\mathcal{T}}. \tag{5}$$

But the connection of F with $w = f(z)$ yields

$$\frac{|dF|_S}{ds_{\mathcal{T}}} = \frac{|dp^{-1}(w)|_S}{ds_{\mathcal{T}}} = \frac{|dp^{-1}(w)|_S}{|dw|}\frac{|dw|}{ds_{\mathcal{T}}} =$$

$$= \frac{|dp^{-1}(w)|_S}{|dw|}\left|\frac{dw}{dz}\right|\frac{1}{\varkappa(z)} = \mathring{f}_S(z)\frac{1}{\varkappa(z)},$$

where $\mathring{f}_S(z)$ is the spherical derivative of f.

The direct verification shows that $\mathring{F}_{\mathcal{T}}$ is multiplicatively periodic of multiplicator q.

It follows from (3) that

$$\frac{d\sigma_{\mathcal{T}}}{d\sigma} = \varkappa^2(z).$$

Taking into account (5) we have

$$A_{\mathcal{T}}(r, F) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\frac{1}{r}\le|z|\le r}(\mathring{f}(z))^2 d\sigma(z) = A_S(r, f)\ .$$

Here $A_S(r, f)$ is the spherical area of $A_{1/r}$ by the mapping f.

For any $a \in \overline{\mathbb{C}}$ the non-constant loxodromic function f of multiplicator q has the same number m of a-points, $m \geq 2$ in each annulus $\{z : qr < |z| \leq r\}$ [5], [2].

This number m is called the *order* of f.

Thus, denoting by $n(r, a)$ the number of a-points of f in the annulus $\{z : \frac{1}{r} < |z| \leq r\}$ we obtain [1]

$$A_S(r, f) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\overline{\mathbb{C}}} n(r, a)d\sigma(a) \leq 2nm \leq 2m\frac{\log r}{\log\frac{1}{q}} + 2m \qquad (6)$$

for r in the interval $(\frac{1}{q^{n-1}}, \frac{1}{q^n}]$.

Similarly,

$$2m\frac{\log r}{\log\frac{1}{q}} - 2m \leq A_S(r, f). \qquad (7)$$

The Ahlfors-Shimizu characteristic of f is [1], [3]

$$\mathring{T}(r, f) = \int\limits_1^r \frac{A_S(t, f)}{t}dt.$$

Relations (6) and (7) yield the following result.

Theorem 1. *Let f be a loxodromic function of multiplicator q and order m. Then its Ahlfors-Shimizu characteristic $\mathring{T}(r, f)$ satisfies the inequalities*

$$\frac{m}{\log\frac{1}{q}}\log^2 r - 2m\log r \leq \mathring{T}(r, f) \leq \frac{m}{\log\frac{1}{q}}\log^2 r + 2m\log r.$$

Note that

$$A_{\mathcal{T}}\left(\frac{1}{\rho}, F\right) = A_S\left(\frac{1}{\rho}, f\right) = m.$$

Therefore, the spherical area of the image of $\mathcal{T}$ is equal to m.

REFERENCES

1. Goldberg A.A., Ostrovskiy I.O. Value distribution of meromorphic functions, Nauka, Moskva, 1970. (in Russian)
2. Hellegouarch Y. Invitation to the Mathematics of Fermat-Wiles, Academic Press, 2002.
3. Kondratyuk A., Laine I. *Meromorphic functions in multiply connected domains*, Fourier series method in complex analysis (Merkrijärvi, 2005), Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser., **10** (2006), 9–111.
4. Rausenberger O. Lehrbuch der Theorie der Periodischen Functionen Einer Variabeln, Leipzig, Druck und Ferlag von B.G.Teubner, 1884.
5. Valiron G. Cours d'Analyse Mathematique, Theorie des fonctions, 2nd Edition, Masson et.Cie., Paris, 1947.

Ivan Franko Lviv National University,
Lviv, Ukraine
e-mail: *khrystiyanyn@ukr.net, kond@franko.lviv.ua*

Received 01.03.2012

Кондратюк А.А., Христіянин А.Я. *Мероморфні відображення тора на сферу Рімана* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — C. 155–159.

Вивчаються мероморфні відображення двовимірного тора на сферу Рімана. Розглядаються їх зв'язки з локсодромними мероморфними функціями в проколеній площині.

Кондратюк А.А., Християнин А.Я. *Мероморфные отображения тора на сферу Римана* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — C. 155–159.

Изучаются мероморфные отображения двухмерного тора на сферу Римана. Рассмотрены их связи с локсодромными мероморфными функциями в проколотой плоскости.

Василишин Богдан Васильович

02.02.1941 – 19.06.2012

19 червня 2012 року колектив Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника зазнав непоправної втрати. Раптово обірвалося життя колишнього багаторічного проректора навчального закладу, завідувача кафедри диференціальних рівнянь і прикладної математики, професора Богдана Васильовича Василишина.

Богдан Васильович народився 2 лютого 1941 року в селі Опришівці Станіславської (нині Івано-Франківської) області. В 1962 році закінчив фізико-математичний факультет Івано-Франківського державного педагогічного інституту. Отримавши диплом з відзнакою, того ж року був зарахований до аспірантури кафедри обчислювальної математики Київського державного університету імені Тараса Шевченка за спеціальністю "обчислювальна математика".

У 1968 році Богдан Василишин захистив дисертацію на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук на тему "Розв'язування крайових задач плоскої теорії пружності при великій кількості вузлів сітки". Після закінчення навчання в аспірантурі працював асистентом, старшим викладачем, з 1971 року — доцентом, завідувачем кафедри математики, з 1979 року — проректором з навчальної роботи Івано-Франківського державного педагогічного інституту імені Василя Стефаника. З жовтня 1993 року до листопада 2007 року Б.В. Василишин працював на посаді першого проректора Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника. З 1996 р. Богдан Васильович Василишин — заслужений працівник народної освіти України. Він є автором багатьох наукових статей, підручників та навчально-методичних посібників. В останні роки життя Богдан Васильович завідував кафедрою диференціальних рівнянь і прикладної математики, був членом редколегії наукового журналу "Карпатські математичні публікації".

На кафедрі і на факультеті математики та інформатики значна частина викладачів вважає Богдана Васильовича своїм учителем і наставником. Богдан Васильович був майстерним лектором. Студенти кількох поколінь ще довго пам'ятатимуть його неперевершені лекції з математичного аналізу, чисельних методів.

До останнього моменту життя Богдана Васильовича його наполеглива праця приносила вагомі здобутки. Неоціненним внеском у розвиток факультету є відкриття спеціальності "прикладна математика", отримання сертифікатів ліцензії і акредитації на здобуття освітньо-кваліфікаційних рівнів бакалавра, спеціаліста та магістра.

Богдан Василишин був справжнім патріотом України, любив рідну мову і свій край. Він завжди пам'ятав своє рідне село Опришівці, приділяв постійну увагу і надавав допомогу його мешканцям.

Ректорат Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, факультет математики та інформатики, кафедра диференціальних рівнянь і прикладної математики глибоко сумують з приводу передчасної смерті професора Богдана Васильовича Василишина і висловлюють щире співчуття його рідним і близьким.

Ціпенда І.Є., Пилипів В.М., Казмерчук А.І.

Науковий журнал

Карпатські Математичні Публікації

(свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 14703-3674Р)

Том 4, №1
2012

Відповідальний за випуск д.ф.-м.н. Загороднюк А.В.
Літературна редакція Дубей М.В., Лабачук О.В., Шарин С.В.
Комп'ютерна правка та макетування Дубей М.В.

Підписано до друку 02.07.2012 р. Формат 60×84/$_8$.
Папір офсетний. Друк цифровий. Гарнітура Computer Modern
Умовн. друк. аркушів 20,25. Наклад 300 примірників. Замовлення 45

Друк: пп Голіней О.М.
м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128
тел. 0342 58 04 32